

Thème : Arithmétique**1. L'exercice proposé au candidat :**

Pour tout entier n non nul, on considère les nombres :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1 \quad b_n = 2 \times 10^n - 1 \quad c_n = 2 \times 10^n + 1$$

- 1) Calculer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$.
- 2) Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.
- 3) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.
- 4) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $b_n \times c_n = a_{2n}$.
En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6 .
- 5) Montrer que $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2)$.
En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

LISTE DES NOMBRES PREMIERS INFÉRIEURS À 100

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41
43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :

- Q.1) Présenter un algorithme permettant d'obtenir le PGCD de deux entiers naturels non nuls.
- Q.2) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.
- Q.3) Proposer un ou plusieurs autres exercices sur le même thème.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Terminale S (Enseignement de spécialité)

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
<p>Arithmétique Divisibilité dans \mathbb{Z}. Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD. Congruences dans \mathbb{Z}. Entiers premiers entre eux.</p> <p>Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. PPCM.</p> <p>Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.</p>	<p>On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de seconde. On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier.</p> <p>On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.</p> <p>Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité. Exemples simples d'équations diophantiennes. Applications élémentaires au codage et à la cryptographie. Application : petit théorème de Fermat.</p>	<p>On montrera l'efficacité du langage des congruences. On utilisera les notations : $a \equiv b (n)$ ou $a \equiv b \pmod{n}$, et on établira les compatibilités avec l'addition et la multiplication. Toute introduction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est exclue.</p> <p>L'unicité de la décomposition en facteurs premiers pourra être admise.</p> <p>L'arithmétique est un domaine avec lequel l'informatique interagit fortement ; on veillera à équilibrer l'usage de divers moyens de calculs : à la main, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.</p>