**Thème : Outils**
**Les nombres complexes**

### 1. L'exercice proposé au candidat :

On se donne trois points non alignés $A, B, C$ du plan, et le triangle $T$ de sommets $A, B, C$.

On se propose ici de démontrer *uniquement à l'aide des nombres complexes* la propriété géométrique classique suivante :

Les hauteurs de $T$ sont concourantes en un point $H$, appelé *orthocentre* de $T$.

1) Montrer qu'on peut munir le plan d'un repère orthonormé tel que les affixes respectives $a, b, c$ des points $A, B, C$ soient de module 1. On suppose qu'il en est ainsi dans la suite de l'exercice.

2) On définit le point $H$ d'affixe $h = a + b + c$.
Montrer que les hauteurs du triangle $T$ se coupent au point $H$ (indication : considérer $z = \dfrac{h-c}{b-a}$)
Montrer que $H$ est aligné avec le centre de gravité de $T$ et le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

### 2. Le travail demandé au candidat

| |
|---|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury |

***Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :***

$Q.1)$ Illustrer le résultat à l'aide du module de géométrie de la calculatrice.

$Q.2)$ Comment mettriez-vous en place, dans une classe, le choix du repère ?
Quel(s) prolongement(s) pourriez-vous proposer à cet exercice ?

$Q.3)$ Proposer un ou deux exercices présentant la résolution, à l'aide des complexes, d'un problème de géométrie.

## 3. Quelques références aux programmes

## Classe de Terminale S

[...] Dans le prolongement du repérage polaire introduit en première, les nombres complexes, outre leur intérêt historique, algébrique et interdisciplinaire pour la poursuite des études, fournissent un outil efficace dans les problèmes faisant intervenir les transformations planes. [...] On privilégiera les problèmes dont les procédés de résolution peuvent avoir valeur de méthode et on entraînera les élèves à choisir l'outil de résolution le plus pertinent parmi ceux dont ils disposent (propriétés des configurations, calcul vectoriel, calcul barycentrique, transformations, nombres complexes, géométrie analytique).

| **Contenus** | **Modalités de mise en oeuvre** | **Commentaires** |
|---|---|---|
| **Géométrie plane : nombres complexes** | | |
| Le plan complexe : affixe d'un point ; parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Conjugué d'un nombre complexe. Somme, produit, quotient de nombres complexes. | Le vocabulaire sera introduit à partir de considérations géométriques. | La vision des nombres complexes est d'abord géométrique : calculs sur des points du plan. Les repérages cartésien et polaire introduits en première conduisent naturellement à deux écritures d'un nombre complexe. |
| Module et argument d'un nombre complexe ; module et argument d'un produit, d'un quotient.<br>Écriture $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.<br><br>Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels. | On retrouvera à cette occasion la notion de coordonnées polaires et celle, sous -jacente, d'équation paramétrique d'un cercle (sous la forme $z = z_\omega + r\mathrm{e}^{i\theta}$ ou $x = x_\omega + r\cos\theta, y = y_\omega + r\sin\theta$).<br>La notation exponentielle sera introduite après avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$ vérifie l'équation fonctionnelle caractéristique des fonctions exponentielles. | L'objectif est ensuite de montrer la puissance de ce calcul dans les problèmes de géométrie. On introduira dans ce chapitre quelques éléments lui donnant une dimension historique. Les nombres complexes permettent de retrouver et de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en première. |
| Interprétation géométrique de $z \mapsto z'$ avec $z' = z + b$ ou $z' - w = k(z - w)$ avec $k$ réel non nul, ou $z' - w = \mathrm{e}^{i\theta}(z - w)$. | On utilisera les nombres complexes pour traiter des exemples simples de configurations et résoudre des problèmes faisant intervenir des translations, des rotations, des homothéties. | On exploitera à la fois les possibilités offertes par les nombres complexes et les raisonnements géométriques directs qui réactivent les connaissances antérieures, notamment sur les transformations du plan. |

**Classe de Terminale S (suite)**

| **Contenus** | **Modalités de mise en oeuvre** | **Commentaires** |
|---|---|---|
| **Similitudes planes (enseignement de spécialité)** | | |
| Définition géométrique. Cas des isométries. Caractérisation complexe : toute similitude a une écriture complexe de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$ ($a$ non nul). | Les similitudes seront introduites comme transformations du plan conservant les rapports de distances. On fera remarquer que la réciproque d'une similitude est une similitude, que la composée de deux similitudes est une similitude et que, dans le cas général, la composition n'est pas commutative. On démontrera qu'une similitude ayant deux points fixes distincts est l'identité ou une symétrie axiale. | La définition générale sera illustrée d'une part avec les transformations étudiées antérieurement, d'autre part avec les transformations d'écriture complexe $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$ ; ces dernières seront amenées progressivement à travers des exemples. La caractérisation complexe est un moyen efficace d'établir la plupart des propriétés. |