Thème : Fonctions

1. L'exercice proposé au candidat

Soit f la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$.

1) Etudier les variations de f.
2) Montrer que la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ est axe de symétrie pour la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f.
3) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + \frac{1}{2}$.
4) Représenter la courbe $\mathscr{C}$.

2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
> Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :

Q.1) La question 1) de l'exercice précédent peut-elle être abordée en Seconde ? Rédiger un corrigé de la question 1) au niveau d'une classe de $1^{\text{ère}}$ S.

Q.2) Exposer une méthode permettant d'établir que la courbe représentative d'une fonction admet un axe de symétrie ou un centre de symétrie.

Q.3) Proposer une version alternative de l'énoncé permettant d'étudier le comportement asymptotique de la courbe en $-\infty$ sans utiliser l'axe de symétrie de la courbe représentative de f.

Q.4) Proposer d'autres exercices portant sur des études de fonctions, mettant en évidence des propriétés de leurs représentations graphiques (non nécessairement parmi les propriétés étudiées ici).

3. Quelques références aux programmes

Programme de Seconde

Analyse

CONTENUS	MODALITES DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Etude qualitative de fonctions. Fonction croissante, fonction décroissante : maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.	Décrire avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations le comportement d'une fonction définie par une courbe. Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation.	S'il s'agit des courbes, on distinguera celles pour lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. La perception sur un graphique de symétries ou de périodicité pourra conduire à une formulation analytique de ces propriétés. On soulignera le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre, tandis qu'une fonction décroissante renverse l'ordre ; une définition formelle est ici attendue. Les positions relatives des différentes courbes ainsi découvertes seront observées et admises.
Premières fonctions de référence.	Etablir le sens de variation et représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.	D'autres fonctions telles que $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \|x\|$ pourront être découvertes à l'occasion de problèmes. Les résultats les concernant pourront être admis.

Programme de $1^{\text{ère}}$S

Analyse

CONTENUS	MODALITES DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Généralités sur les fonctions Sens de variations et représentation graphique d'une fonction de la forme $u+\lambda$, λu, la fonction u étant connue. Sens de variations de $u \circ v$, u et v étant des fonctions monotones. Résolution de l'équation du second degré. Etude du signe d'un trinôme.	On travaillera à l'aide de grapheurs, sur des familles de courbes représentatives de fonctions associées à deux fonctions données u et v : $u+\lambda$, λu, $\|u\|$, $x \mapsto u(\lambda x)$ et $x \mapsto u(x+\lambda)$. On aboutira ici aux formules usuelles donnant les racines et la forme factorisée d'un trinôme du second degré.	On remarquera à l'aide de contre-exemples qu'on ne peut pas énoncer de règles donnant dans tous les cas le sens de variations de $u+v$ ou de uv. On justifiera les symétries observées sur les représentations graphiques On fera le lien entre les résultats et l'observation des représentations graphiques obtenues à l'aide d'un grapheur.
Dérivation Dérivées des fonctions usuelles : $x \mapsto x^n$,$x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$. Dérivée d'une somme d'un produit, d'un quotient et de $x \mapsto f(ax+b)$. Lien entre signe de la dérivée et variations.	On justifiera le résultat donnant la dérivée de u et $\frac{1}{v}$. On étudiera, sur quelques exemples, le sens de variations de fonctions polynômes de degré 2 ou 3, de fontions homographiques ou de fonctions rationnelles très simples. On introduira les notions et le vocabulaire usuels (extremum, majorant, minorant) et, de l'étude du sens de variations, on déduira des encadrements d'une fonction sur un intervalle.	On justifiera que la dérivée d'une fonction monotone sur un intervalle est de signe constant : on admettra la réciproque. L'étude de fonctions ne sera pas présentée comme une fin en soi, mais interviendra lors de la résolution de problèmes.

Comportement asymptotique de certaines fonctions Asymptotes verticales, horizontales ou obliques	On étudiera sur des exemples très simples (fonctions polynômes de degré 2 ou 3, fonctions rationnelles du type $x \mapsto ax+b+h(x)$ avec h tendant vers 0 en $+\infty$ ou $-\infty$), les limites aux bornes de l'intervalle de définition et les asymptotes éventuelles.	On s'appuiera sur l'intuition ; les résultats usuels sur les sommes et produits de limites apparaîtront à travers des exemples et seront ensuite énoncés clairement.

Programme de Terminale S

Analyse

Une bonne maîtrise des fonctions classiques (dérivées, extrema, comportements asymptotiques, courbes représentatives) est nécessaire ; elle doit permettre une certaine aisance dans les problèmes qui les mettent en jeu.

CONTENUS	MODALITES DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Limites de suites et de fonctions Notions de limite finie ou infinie d'une fonction en un réel a.	On reverra à cette occasion la notion d'asymptote oblique, en se limitant aux fonctions se mettant sous la forme $ax+b+h(x)$, où h tend vers 0 à l'infini. On montrera sur des exemples que l'étude sur calculatrice ou au tableur d'une suite ou d'une fonction permet de conjecturer des limites qui devront ensuite être justifiées.	