

Thème : Equations différentielles

Problèmes issus de la géométrie, de la physique, de la biologie, de l'économie, des probabilités. . . , conduisant à la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

1. L'exercice proposé au candidat

Une loi de Newton stipule que la vitesse de refroidissement d'un corps reste proportionnelle à la différence entre la température de ce corps à l'instant t et la température constante de l'air ambiant (le coefficient de proportionnalité dépend essentiellement de la surface de contact entre le corps et son milieu, et on considérera ici que ce coefficient est constant).

- 1) Préciser et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la température $\theta(t)$ à l'instant $t > t_0$, d'un corps porté initialement (c'est-à-dire à l'instant t_0) à la température θ_0 , et qui est plongé dans un environnement dont la température constante est égale à θ_c .
- 2) La température de votre cuisine (et de votre appartement) est constante, égale à 20°C . Quand vous le sortez du four à 20h, la température du gâteau que vous avez préparé pour vos invités est 180°C . Vous observez qu'à 20h30 elle est encore de 100°C .
A quelle heure pourrez-vous le servir à la température idéale, soit 25°C ?
- 3) Comme vous voulez absolument servir votre gâteau à 22h précises, vous commencez par le placer dès 20h sur le rebord de votre fenêtre, où l'air ambiant est à une température de 0°C .
Combien de temps devrez-vous le laisser sur ce rebord avant de le rentrer à l'intérieur pour que vos invités puissent le déguster à 22h à la température idéale ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :

- Q.1) Préciser l'équation différentielle utilisée dans la première question de l'exercice et sa solution générale. Comment traiteriez-vous cette résolution dans une classe de terminale ?
- Q.2) Indiquer la façon dont vous pourriez mettre en place un tel exercice dans une classe de terminale S (notions traitées au préalable, rôle joué par les outils de calculs numériques et/ou formel, synthèse de la résolution, éventuellement proposition de questions intermédiaires...)
- Q.3) Proposer un ou deux exercices issus de la géométrie, de la physique, de la biologie, de l'économie ou des probabilités, etc. et conduisant à la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

3. Quelques références aux programmes

Classe de Terminale S

Contenus	Modalités de mise en oeuvre	Commentaires
<p>Introduction de la fonction exponentielle Étude de l'équation $f' = kf$. Théorème : "<i>il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbf{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.</i>" Relation fonctionnelle caractéristique. Introduction du nombre e. Notation e^x. Extension du théorème pour l'équation $f' = kf$.</p>	<p>L'étude de ce problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou par la recherche des fonctions dérivables f telles que $f(x + y) = f(x)f(y)$ [...]</p>	<p>Ce travail se fera très tôt dans l'année car il est central dans le programme de mathématiques et de physique. Il fournit un premier contact avec la notion d'équation différentielle et montre comment étudier une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite [...]</p>
<p>Équations différentielles $y' = ay + b$</p>	<p>On démontrera l'existence et l'unicité de la solution passant par un point donné.</p> <p>On étudiera quelques problèmes où interviennent des équations différentielles se ramenant à $y' = ay + b$.</p>	<p>Ce paragraphe, déjà abordé lors de l'introduction de \exp, pourra être réparti sur l'ensemble de l'année. On fera le lien avec l'étude de ces équations en physique ; on définira le temps caractéristique $\tau = -1/a$ pour $a < 0$. Les indications utiles pour se ramener à $y' = ay + b$ doivent être données. Des solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ seront introduites en cours de physique.</p>

Extrait du document d'accompagnement des programmes de la classe de Terminale S

Un concept important : celui d'équation différentielle

[...] Le travail des élèves sur l'année de terminale peut être décomposé en plusieurs parties : un travail sur la fonction exponentielle en début d'année ; puis, au cours de l'année on étudiera l'équation $y' = ay + b$: les élèves doivent savoir que par un point quelconque, il passe une solution unique.

Enfin, on rencontrera des exemples divers d'équations différentielles : il importe de donner des exercices où apparaissent des équations différentielles autres que $y' = ay + b$ mais comme aucune connaissance spécifique à ce sujet n'est au programme, on donnera toutes les indications utiles.

On fera vivre le concept régulièrement dans l'année. On choisira avec soin une ou deux situations menant à une équation différentielle simple. Les élèves seront guidés dans le travail de traduction mathématique. Cette étape est délicate : s'y confronter au moins une fois est indispensable, mais aucune compétence n'est exigible à ce sujet pour l'examen du baccalauréat. Une équation étant posée ou donnée, les élèves pourront vérifier si telle ou telle fonction déjà connue en est solution ; [...]

L'importance de ce chapitre ne réside pas dans la multiplicité des types d'équations qu'on peut envisager de résoudre, mais dans les idées qui sous-tendent cette notion. Il s'agit d'équations dont l'inconnue est une fonction, définie sur l'ensemble des réels ou sur un intervalle imposé par la situation originelle (ou de façon arbitraire). On pourra reprendre une ou deux équations du cours de physique ; [...]