Thème : Probabilités conditionnelles

1. L'exercice proposé au candidat

On considère un carré $ABCD$ et son centre de gravité Ω. On note $\mathcal{E} = \{A, B, C, D, \Omega\}$.

Une puce se déplace aléatoirement en sautant d'un point de $\mathcal{E}$ à un autre. La seule contrainte est que si un saut relie deux sommets du carré, ceux-ci doivent être adjacents. À chaque saut, tous les déplacements possibles sont équiprobables. La puce ne reste pas deux fois de suite au même endroit.

Au départ (c'est-à-dire avant son premier saut) elle se trouve au point Ω.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note Ω_n l'événement « *la puce se trouve au point* Ω *à l'issue de son* n*-ième saut* ».

On définit de même les événements A_n, B_n, C_n, D_n. On notera $p_n = p(\Omega_n)$ (donc $p_0 = 1$).

1) Calculer p_1 et p_2.
2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier les égalités $p(A_n) = p(B_n) = p(C_n) = p(D_n) = \dfrac{1}{4}(1 - p_n)$.
3) Montrer que $p_{n+1} = \dfrac{1}{3}(1 - p_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (utiliser la formule des probabilités totales).
4) En déduire que pour tout n on a $p_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{4}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégagez les méthodes et outils nécessaires à la résolution de cet exercice.

$Q.2$) Comment se généralise le problème si l'on remplace le carré $ABCD$ par un polygone à k sommets ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question $Q.2$).
- Un ou deux exercices se rapportant au thème « **Probabilités conditionnelles** ».

3. Quelques références aux programmes

Classe de 1ère S. Probabilités.

Contenus	**Modalités de mise en oeuvre**	**Commentaires**
Probabilités		
Définition d'une loi de probabilité sur un ensemble fini. Espérance, variance, écart-type d'une loi de probabilité. Probabilité d'un événement, de la réunion et de l'intersection d'événements. Cas de l'équiprobabilité. Modélisation d'expériences aléatoires de référence (lancers d'un ou plusieurs dés ou pièces discernables ou non, tirage au hasard dans une urne, choix de chiffres au hasard, etc.).	Le lien entre loi de probabilité et distributions de fréquences sera éclairé par un énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres. On expliquera ainsi la convergence des moyennes vers l'espérance et des variances empiriques vers les variances théoriques.	On pourra par exemple choisir comme énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres la proposition suivante : Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de P quand n devient grand.

Classe de Term ES. Enseignement obligatoire

Contenus	**Modalités**	**Commentaires**
Statistiques et probabilités		
Conditionnement et indépendance.	On justifiera la définition de la probabilité B sachant A, notée $P_A(B)$, par des calculs fréquentiels. On utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes, etc., efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités.	Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve.
Conditionnement par un événement de probabilité non nulle puis indépendance de deux événements.		
Formule des probabilités totales.	On appliquera entre autre cette formule à la problématique des tests de dépistage.	Les élèves doivent savoir appliquer la formule des probabilités totales sans aide dans des cas simples.
Modélisation d'expériences indépendantes. Cas de la répétition d'expériences identiques et indépendantes.	On retravaillera les expériences de références vues en seconde et première (dés, pièces, urnes, etc.)	On conviendra, en conformité avec l'intuition, que pour des expériences indépendantes, la probabilité de la liste des résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

Classe de Term S. Enseignement obligatoire

Contenus	**Modalités de mise en oeuvre**	**Commentaires**
Conditionnement et indépendance		
Conditionnement par un événement de probabilité non nulle puis indépendance de deux événements.	On justifiera la définition de la probabilité de B sachant A, notée $P_A(B)$, par des calculs fréquentiels.	
Indépendance de deux variables aléatoires.	On utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes... efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités.	Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve.
Formule des probabilités totales.	Application à la problématique des tests de dépistage en médecine et à la loi de l'équilibre génétique lors d'appariements au hasard.	Les élèves doivent savoir appliquer sans aide la formule des probabilités totales dans des cas simples
Suites et récurrence		
Raisonnement par récurrence. Suite monotone, majorée, minorée, bornée.	[...] On traitera quelques problèmes menant à l'étude de suites $u_{n+1} = au_n + b$.	Aucune notion théorique de rapidité de convergence n'est au programme.