Thème : La proportionnalité

1. L'exercice proposé au candidat

Pendant plusieurs siècles, on a utilisé et enseigné la règle de *fausse position*. L'encadré ci-dessous propose un extrait d'un ouvrage édité en 1784, consultable aujourd'hui sur le site de la Bibliothèque Nationale de France, expliquant cette règle.

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE
MATHÉMATIQUES.

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE, *de l'Académie Royale des Sciences, de celles de Pétersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Gottingue, & de l'Institut de Bologne; Professeur de Mathématiques au Collége Mazarin.*

265. *La regle de fauſſe poſition* ſert à trouver un nombre inconnu par le moyen d'un nombre ſuppoſé. Soit propoſé, par exemple, de trouver un nombre dont la moitié, le quart & le cinquieme faſſent 456.

Je ſuppoſe que ce nombre eſt 20. Mais il eſt clair que la moitié, le quart & le cinquieme de 20 ne font que 19. Ma ſuppoſition eſt donc fauſſe. Elle n'en ſervira pas moins cependant à me faire connoître le nombre demandé. Car puiſque deux quantités ſont toujours entre elles comme leurs parties ſemblables (242), on peut les regarder l'une comme la ſomme des antécédents d'une ſuite de termes proportionels, l'autre comme la ſomme des conſéquents. Or ces deux ſommes ſont entre elles (241), comme un nombre quelconque d'antécédents eſt au même nombre de conſéquents, & réciproquement; donc la moitié plus le quart, plus le cinquieme de 20, ſont à la moitié, plus au quart, plus au cinquieme du nombre que je cherche, comme le nombre 20 lui-même eſt au nombre cherché. J'ai donc, $19 : 456 :: 20 : x = 480$.

En utilisant la typographie actuelle

Proposition 265. La règle de fausse position sert à trouver un nombre inconnu par le moyen d'un nombre supposé. Soit proposé, par exemple, de trouver un nombre dont la moitié, le quart et le cinquième fassent 456.
Je suppose que ce nombre est 20. Mais il est clair que la moitié, le quart et le cinquième de 20 ne font que 19. ma supposition est donc fausse. Elle n'en servira pas moins cependant à me faire connaître le nombre demandé. Car puisque deux quantités sont toujours entre elles comme leurs parties semblables (Proposition 242), on peut les regarder l'une comme la somme des antécédents d'une suite de termes proportionnels, l'autre comme la somme des conséquents. Or ces deux sommes sont entre elles (Proposition 241), comme un nombre quelconque d'antécédents est au même nombre de conséquents et réciproquement ; donc la moitié plus le quart, plus le cinquième de 20 sont à la moitié plus le quart, plus au cinquième du nombre que je cherche, comme le nombre 20 est lui même au nombre cherché.
J'ai donc, $\dfrac{19}{456} = \dfrac{20}{x}$ soit $x = 480$.

1) Résoudre le problème posé : « trouver un nombre dont la moitié, le quart et le cinquième fassent 456 ».
2) Le nombre 20 a-t-il été choisi au hasard ? Le résultat trouvé dépend-il de ce choix ?
3) L'auteur fait référence à deux propriétés établies auparavant (numérotées 242 et 241). la première citée (242) :« Deux quantités sont toujours entre elles comme leurs parties semblables » peut se traduire aujourd'hui par l'égalité : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ka}{kb}$. Quelle propriété des tableaux de proportionnalité peut traduire la seconde ?
4) En appliquant cette méthode, trouver la solution du problème posé par Fancès Pellos gentilhomme niçois de la fin du XV^{e}siècle : « *Une lance a la moitié et le tiers dans l'eau et 9 paumes à l'extérieur. Je te demande combien elle a de long ?* ».

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Quelles sont les propriétés sur lesquelles repose la « règle de la fausse position » ?

Q.2) Quelle classe de problèmes cette règle permet-elle de résoudre ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

Divers exercices sur le thème « **La proportionnalité** ». On veillera à ce que ce choix recouvre diverses classes de l'enseignement secondaire.

3. Quelques références aux programmes

Introduction générale pour le Collège

Certains problèmes peuvent prendre appui sur des éléments empruntés à l'histoire de mathématiques. Les moyens modernes de communication (informatique, banques de données, audiovisuel) sont également utilisés chaque fois que leur usage est justifié.

Programme de Sixième (mis en œuvre depuis septembre 2005)

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
1.1 Proportionnalité (Programme cycle 3 : document d'application, p.16 et 17)	– Traiter les problèmes « de proportionnalité », en utilisant des raisonnements appropriés, en particulier : – passage par l'image de l'unité ; – utilisation d'un rapport de linéarité, exprimé, si nécessaire, sous forme de quotient ; – utilisation du coefficient de proportionnalité, exprimé, si nécessaire, sous forme de quotient. – Reconnaître les situations qui relèvent de la proportionnalité et celles qui n'ent relèvent pas. – Appliquer un taux de pourcentage	Les problèmes à proposer (qui relèvent aussi bien de la proportionnalité que de la non proportionnalité) se situent dans le cadre des grandeurs (quantités, mesures). L'étude de la proportionnalité dans le cadre purement numérique relève du programme de la classe de cinquième. Les situations de proportionnalité se caractérisent par le fait que des raisonnements du type « fois plus » peuvent être mobilisés. Pour chaque situation, l'élève doit être en mesure de mobiliser l'une ou l'autre des compétences citées. Les raisonnement correspondants s'appuient : – soit sur la propriété de linéarité relative à la multiplication (homogénéité) qui correspond, par exemple, au fait que « 3 fois plus d'objets coûtent 3 fois plus cher », – soit sur la mise en évidence du coefficient de proportionnalité : par exemple, sur un plan, une distance sur le terrain est traduite par une distance « deux cent fois plus petite ». La propriété additive de la linéarité est également utilisée. Ces différentes propriétés n'ont pas à être formalisées. Les rapports utilisés sont, soit des rapports entiers ou décimaux simples (2,5 par exemple qui peut être exprimé par « 2 fois et demie »), soit par des rapports exprimés sous forme de quotient : le prix de 7m de tissu est 7/3 fois le prix de 3m de tissu. La notion de pourcentage a été présentée au cycle 3, mais aucune procédure experte n'a été étudiée. Il s'agit, en classe de sixième de mettre en évidence et de justifier, par exemple, que prendre « 17 pour cent d'un nombre » revient à mutiplier ce nombre par 17/100, en relation avec le travail sur la notion de quotient. Mais, dans des cas simples, des solutions plus rapides sont possibles. Par exemple, pour prendre 17% de 200, les élèves doivent remarquer qu'il suffit de multiplier 17 par 2.

Programme de Cinquième (mis en œuvre jusqu'en juillet 2006)

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
2. Exemples de fonctions.		Toute définition de la notion de fonction sera évitée, mais des expressions telles que « en fonction de », « est fonction de » seront utilisées.
Proportionnalité	Reconnaître, s'il y a lieu, la proportionnalité sur un tableau complet de nombres. Compléter un tableau de nombres représentant une relation de proportionnalité dont les données sont fournies partiellement. En particulier, déterminer une quatrième proportionnelle. Mettre en œuvre la proportionnalité dans les cas suivants : – utiliser des unités combinant le système décimal et le système sexagésimal (mesure du temps), – calculer et utiliser l'échelle d'une carte ou d'un dessin, – reconnaître un mouvement uniforme à la proportionnalité entre temps et distance parcourue ; utiliser cette proportionnalité, – effectuer pour des volumes des changements d'unité de mesure.	On pourra notamment constituer un tableau des abscisses et ordonnées de points d'une droite passant par l'origine dans le plan muni d'un repère. Les élèves retiendront que dans une relation de proportionnalité, la correspondance est déterminée par un couple de valeurs homologues non nulles. Les activités numériques et graphiques pourront se référer à l'un ou l'autre thème exploitant des formules, notamment de longueur, d'aire et de volume. Ainsi, on pourra envisager des variations : – de l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme, de celle d'un disque, – de la longueur d'un arc de cercle, de l'aire d'un secteur circulaire, – du volume ou de l'aire latérale d'un cylindre ou d'un prisme droit, en fonction d'une variable de la formule, toute autre variable étant fixée.

Programme de Quatrième (mis en œuvre jusqu'en juillet 2007)

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
1. Représentations graphiques. Proportionnalité.	Utiliser, dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité sous forme d'alignements de points avec l'origine.	On fera travailler les élèves à la fois sur des exemples et des contre-exemples de situations de proportionnalité.
2. Applications de la proportionnalité. Vitesse moyenne Grandeurs quotients courantes.	Utiliser l'égalité $d = vt$ pour des calculs de distance parcourue, de vitesse et de temps. Changer d'unités de vitesse (mètre par seconde et kilomètre par heure).	Les situations où interviennent des vitesses moyennes constituent des exemples riches où le traitement mathématique s'avère particulièrement pertinent, comme l'étude de la vitesse moyenne d'un trajet sur un parcours de 60km, où l'aller se parcourt à 20km/h et le retour à 30km/h. Les compétences exigibles se réduisent aux vitesses mais d'autres situations de changement d'unités méritent d'être envisagées : problème de change monétaire, consommation de carburant d'un véhicule en litres pour 100km ou en kilomètres parcourus par litre.
Calculs faisant intervenir des pourcentages		En liaison avec d'autres disciplines (géographie, . . .), la notion d'indice pourra être présentée comme un cas particulier du coefficient de proportionnalité, donnant lieu à des illustrations et calculs mais en aucun cas à des développements théoriques.
	Mettre en œuvre la proportionnalité dans des situations simples utilisant à la fois des pourcentages et des quantités ou des effectifs.	Des situations issues de la vie courante ou des autres disciplines demandent de mettre en œuvre à la fois un coefficient de proportionnalité, sous forme de pourcentage ou d'indice, et des quantités ou des effectifs. Par exemple, connaissant le pourcentage d'un caractère dans deux groupes d'effectifs distincts, déterminer le pourcentage après réunion des deux groupes.

Programme de Troisième (mis en œuvre jusqu'en juillet 2008)

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
2. Proportionnalité et traitements usuels des grandeurs. Applications de la proportionnalité.	Dans des situations mettant en jeu des grandeurs, l'une des grandeurs étant fonction de l'autre, – représenter graphiquement la situation de façon exacte si cela est possible, sinon de façon approximative, – lire et interpréter une telle représentation	En classe de troisième, il s'agit de compléter l'étude de la proportionnalité commencée en fait dès l'école. De nombreuses occasions sont données de conjecturer ou de reconnaître, puis d'utiliser la proportionnalité de valeurs ou d'accroissements dans les différents domaines et sections du programme. Les situations mettant en jeu des grandeurs restent privilégiées pour mettre en place et organiser des calculs faisant intervenir la proportionnalité, en particulier les pourcentages. Par exemple, au-delà des compétences exigibles, on pourra étudier des problèmes de mélange.