

Thème : Fonctions
Etude d'encadrement d'une fonction par des fonctions plus simples

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Etudier les variations des fonctions g et h définies sur l'ensemble des réels respectivement par :

$$g(x) = x - \sin(x) \quad \text{et} \quad h(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)$$

2. Déterminer le signe de ces deux fonctions sur $[0; +\infty[$.

3. Prouver que pour tout x réel positif on a : $0 \leq x - \sin(x) \leq \frac{x^3}{6}$

4. Démontrer que pour tout réel x strictement positif on a : $-\frac{x}{6} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 0$.

Que peut-on en déduire pour f ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
 Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Analyser la méthode utilisée dans cet exercice.
 Q.2) Proposer une nouvelle formulation de la première question pour faciliter sa résolution par des élèves de lycée.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question Q.2)
- Un ou plusieurs exercices sur le thème « **Fonctions : Etude d'encadrement d'une fonction par des fonctions plus simples** ».

3. Quelques références aux programmes

Classe de Première S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
<p>Nombre dérivé d'une fonction en un point : définition comme limite de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. Fonction dérivée. Tangente à la courbe représentative d'une fonction f dérivable ; approximation affine associée à la fonction.</p>		<p>Dans les cas usuels, la limite de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ s'obtient après transformation d'écriture, en invoquant des arguments très proches de l'intuition. On ne soulèvera aucune difficulté à leur propos et on admettra tous les résultats utiles. La notion de développement limité à l'ordre 1 n'est pas au programme. On pourra cependant évoquer le caractère optimal de l'approximation affine liée à la dérivée.</p>

Classe de Terminale S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
<p>Rappel de la définition de la limite d'une suite. Extension à la limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$.</p> <p>Notion de limite finie ou infinie d'une fonction en un réel a.</p> <p>Théorème « des gendarmes » pour les fonctions.</p>	<p>Pour exprimer que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$, on dira que : « tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand ».</p> <p>On montrera qu'une suite croissante non majorée tend vers l'infini. On reverra à cette occasion la notion d'asymptote oblique, en se limitant aux fonctions se mettant sous la forme $ax + b + h(x)$, où h est une fonction tendant vers 0 à l'infini.</p> <p>On montrera sur des exemples que l'étude sur calculatrice ou sur tableur d'une suite ou d'une fonction permet de conjecturer des limites qui devront ensuite être justifiées.</p> <p>On démontrera ce théorème lorsque la variable tend vers l'infini. On étendra ce théorème au cas des limites infinies.</p>	<p>Il s'agit de prolonger le travail fait en première sur les suites.</p> <p>L'expression « pour x assez grand » est l'analogue pour les fonctions de l'expression « à partir d'un certain rang » pour les suites.</p> <p>Pour les limites en un réel a, aucune définition n'est exigée : on reprendra l'approche intuitive adoptée en classe de première. Sur un exemple, on fera le lien entre limite en un réel a et à l'infini. On pourra parler de limite à droite ou à gauche à l'occasion de certains exemples.</p>