Thème : Analyse : Fonctions et équations

1. L'exercice proposé au candidat

Soit k un réel. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{kt^2}\,\mathrm{d}t$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de F et l'on s'intéresse au nombre de points M_0 d'abscisse x_0 appartenant à $\mathcal{C}$ et en lesquels la tangente à $\mathcal{C}$ a un coefficient directeur égal à x_0.

1) Montrer qu'un tel point M_0 existe si et seulement si $x_0 > 0$ et vérifie l'équation

$$(E) : \qquad \ln x = kx^2.$$

2) a) En utilisant une calculatrice graphique et en faisant varier les valeurs de k, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) dans $]0, +\infty[$.

b) Si $k > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de k pour laquelle l'équation (E) a une unique solution dans $]0, +\infty[$.

3) Démontrer que pour $k < 0$, l'équation (E) a une unique solution dans $]0, +\infty[$.

2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Présenter, à l'aide de la calculatrice, la ou les représentations permettant de faire les conjectures demandées à la question 2).

Q.2) Proposer une solution de la question 3) de l'exercice telle que le candidat la présenterait à des élèves de terminale.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- ◇ Sa réponse à la question **Q.2)**.
- ◇ L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Fonctions et équations** ».

3. Quelques références aux programmes

Programme de seconde

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations.	Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction. Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type : $f(x) = k, f(x) < k, f(x) = g(x); f(x) < g(x)$	Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives. On ne s'interdira pas de donner un ou deux exemples de problèmes conduisant à une équation qu'on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherchera des solutions approchées.

Programme de Première S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Résolution de l'équation du second degré. Étude du signe d'un trinôme.	On aboutira ici aux formules usuelles donnant les racines et la forme factorisée d'un trinôme du second degré.	On fera le lien entre les résultats et l'observation des représentations graphiques obtenues à l'aide d'un grapheur.

Programme de Terminale S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Théorème (dit des valeurs intermédiaires) : « soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$ ».	Ce théorème pourra être admis ou démontré à l'aide de suites adjacentes. On démontrera le corollaire suivant : « si f est une fonction continue strictement monotone sur $[a; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a; b]$ ». On étendra ce corollaire au cas où f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues. On pourra approcher la solution de l'équation $f(x) = k$ par dichotomie ou balayage avec la calculatrice ou au tableur.	On conviendra, dans les tableaux de variations, que les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. Dans la rédaction de la solution à un problème, une simple référence au tableau de variations suffira pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$.