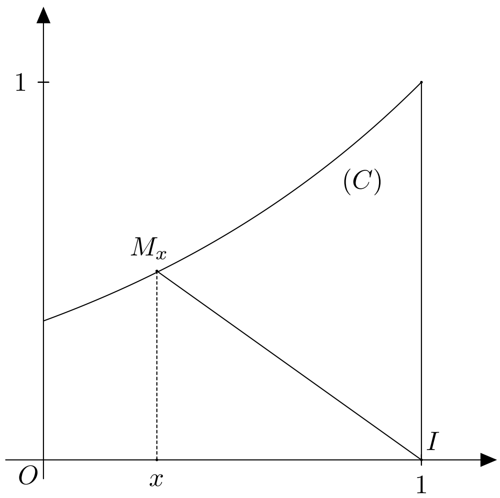
Thème : Intégration

1. L'exercice proposé au candidat

Soit f une fonction dérivable, strictement positive et strictement croissante sur $[0, 1]$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O. On note I le point de coordonnées $(1, 0)$ et on note Δ la portion du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ tel que, si A est le point de (C) d'abscisse α, le segment $[IA]$ partage Δ en deux parties de même aire.



Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, on note M_x le point de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$. On désigne par g la fonction qui à tout réel $x \in [0, 1]$ associe l'aire du domaine limité par la droite (IM_x), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe (C).

1) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, exprimer $g(x)$ en fonction de x.
2) Étudier les variations de la fonction g sur $[0, 1]$.
3) a) Par des considérations d'aires, montrer que $g(0) < \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0, 1]$ tel que $g(\alpha)$ soit égal à la moitié de l'aire de Δ.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 3) de l'exercice ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Intégration** ».

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;

– les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Terminale S

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Intégration		
Pour une fonction f continue positive sur $[a, b]$, introduction de la notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ comme aire sous la courbe. Valeur moyenne d'une telle fonction.	On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.	Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions ; tout développement théorique est exclu.
Extension à l'intégrale et à la valeur moyenne d'une fonction de signe quelconque.	On indiquera la convention de signe sur un intervalle où f est négative et on en déduira le cas général ; on pourra aussi ajouter une constante à f pour la rendre positive.	Cette extension doit être faite brièvement. Cette convention de signe prendra tout son sens lors de l'étude de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Intégration et dérivation		
Notion de primitive. Théorème : « si f est continue sur un intervalle I, et si a est un point de I, la fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a ».	On démontrera que F est une primitive de f dans le cas où f est continue et croissante, et on admettra le cas général.	L'intégration permet d'établir l'existence de primitives des fonctions continues et d'en donner des méthodes numériques de calcul ; inversement, la connaissance d'une primitive d'une fonction continue donne une formule explicite pour le calcul des intégrales : les élèves devront percevoir l'intérêt de cette double démarche.
Calcul de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une primitive de f.	Tableau primitives-dérivées des fonctions usuelles (fonctions $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, sinus, cosinus). Application de la dérivation des fonctions composées à la primitivation de u'/u, $u'\mathrm{e}^u$, $u'u^n$.	L'existence d'une solution de $y' = f(t)$, admise en 1re est ainsi justifiée ; de même, est justifiée l'existence du logarithme : celle de sa fonction réciproque en découle alors. La volonté d'introduire rapidement la fonction exponentielle pour la physique aura conduit à admettre un théorème d'existence en début d'année, qui se trouve ici justifié.
Intégration par parties.		On se limitera à des cas simples où l'élève aura à trouver lui-même le recours à la technique d'intégration par parties.