

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

## Problème n° 1

### Notations.

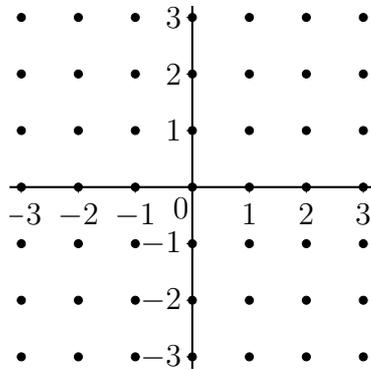
$\mathbb{Z}$  désigne l'ensemble des entiers relatifs et  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

Le plan  $\mathbb{R}^2$  est muni de sa structure usuelle de plan euclidien. La distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$  est notée  $d$ .

Les éléments de  $\mathbb{R}^2$  sont représentés par des vecteurs colonnes à 2 lignes. On note

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On appelle réseau l'ensemble  $\mathbb{Z}^2$ , inclus dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . On le note  $\mathcal{R}$ . Le schéma ci-dessous représente une partie du réseau  $\mathcal{R}$ .



### Partie A : $\mathbb{Z}$ -bases du réseau

Soient  $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2)$  une famille de deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $\mathcal{B}$  est une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{R}$  si :

- $e'_1, e'_2 \in \mathcal{R}$ .
- Tout élément  $X$  de  $\mathcal{R}$  s'écrit de façon unique  $X = ae'_1 + be'_2$ , avec  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

**I.** Soit  $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que  $\mathcal{C}$  est une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{R}$ .

**II.** Soient  $e'_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$  et  $e'_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ . On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

1. Soit  $X \in \mathbb{R}^2$  et  $x, y \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $X = xe'_1 + ye'_2$  si, et seulement si,

$$X = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2. On suppose dans cette question que  $(e'_1, e'_2)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{R}$ .

a. Montrer que  $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$ .

b. Montrer qu'il existe  $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^4$  tels que

$$x_1 e'_1 + y_1 e'_2 = e_1 \qquad x_2 e'_1 + y_2 e'_2 = e_2.$$

c. Soit  $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $AB = I_2$ .

d. En déduire que  $\det(A) \in \{-1, 1\}$ .

3. On suppose dans cette question que  $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$  et que  $\det(A) \in \{-1, 1\}$ .

a. Montrer que  $A$  est une matrice inversible et que les coefficients de  $A^{-1}$  sont tous des entiers relatifs.

b. Montrer que  $(e'_1, e'_2)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{R}$ .

4. Conclure.

III. Soit  $e'_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$  un vecteur de  $\mathcal{R}$ .

1. Montrer que si  $e'_1$  est le premier vecteur d'une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{R}$ , alors  $a_1$  et  $b_1$  sont premiers entre eux.

2. Réciproquement, montrer que si  $a_1$  et  $b_1$  sont premiers entre eux, alors il existe un vecteur  $e'_2$  de  $\mathcal{R}$  tel que  $(e'_1, e'_2)$  soit une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{R}$ .

3. Donner une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{R}$  dont le premier vecteur est  $\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$ .

## Partie B : transformations linéaires du réseau

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  une application linéaire. Sa matrice dans la base  $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  est notée  $A$ .

I. Montrer que  $f(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$  si, et seulement si, les coefficients de  $A$  sont tous des entiers relatifs.

II. On suppose dans cette question que  $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ .

1. Montrer que  $\text{Im} f$  contient deux vecteurs linéairement indépendants.

2. En déduire que  $f$  est surjective, puis bijective.

3. Montrer que  $f^{-1}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$ .

4. Justifier que  $A$  est inversible et que les coefficients de  $A^{-1}$  sont tous des entiers relatifs.

5. Montrer que  $\det(A) \in \{-1, 1\}$ .

III. On suppose dans cette question que les coefficients de  $A$  sont des entiers relatifs et que  $\det(A) \in \{-1, 1\}$ .

1. En utilisant les résultats de la partie A., montrer que  $(f(e_1), f(e_2))$  est une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{R}$ .

2. En déduire que  $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ .

IV. Conclure.

## Partie C : isométries du réseau

Soit  $G$  l'ensemble des isométries affines  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  telles que  $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$  et soit  $G_0$  l'ensemble des éléments  $f$  de  $G$  tels que  $f(O) = O$ .

**I.** Montrer que  $G$ , muni de la loi de composition des applications, est un groupe et que  $G_0$  est un sous-groupe de  $G$ .

**II.** Soit  $f \in G_0$ . On remarque qu'alors  $f$  est une application linéaire et que les résultats de la partie **B.** s'appliquent. Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

1. Déterminer tous les points  $X$  de  $\mathcal{R}$  situés à la distance 1 de  $O$ .

2. Montrer que  $f(e_1)$  et  $f(e_2)$  appartiennent à l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Montrer que  $A$  appartient à l'ensemble

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

**III.** Soient  $s_1$  et  $s_2$  les applications linéaires de matrices respectives dans la base  $\mathcal{C}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Décrire la nature géométrique de  $s_1$  et  $s_2$ .

2. Décrire la nature géométrique de  $s_1 \circ s_2$  et de  $s_2 \circ s_1$  et donner leurs matrices dans la base canonique.

3. Montrer que  $s_1$  et  $s_2$  sont des éléments de  $G_0$ .

4. En déduire que, si la matrice dans la base canonique d'une application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  est dans  $H$ , alors  $f$  est un élément de  $G_0$ .

**IV.** Donner tous les éléments de  $G_0$ .

**V.** Soit  $t$  la translation de vecteur  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Montrer que  $t \in G$  si, et seulement si,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$ .

**VI.** Soit  $f \in G$  et soit  $t'$  la translation de vecteur  $-f(O)$ . Montrer que  $t'$  est un élément de  $G$  et que  $g = t' \circ f$  est un élément de  $G_0$ .

**VII.** Montrer que tout élément  $f$  de  $G$  s'écrit de façon unique  $f = t \circ g$ , avec  $t$  une translation de vecteur dans  $\mathcal{R}$  et  $g$  un élément de  $G_0$ .

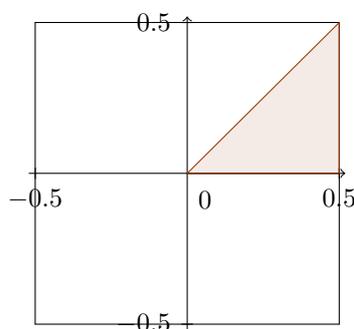
## Partie D : un pavage du plan

On note  $T$  la surface délimitée par le triangle de  $\mathbb{R}^2$  de sommets

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

et on note  $C$  la surface délimitée par le carré de sommets

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



**I. 1.** Justifier que

$$C = \bigcup_{g \in G_0} g(T).$$

**2.** Montrer que, si  $g_1$  et  $g_2$  sont deux éléments distincts de  $G_0$ , alors l'intersection des triangles  $g_1(T)$  et  $g_2(T)$  est, soit un segment, soit un point.

**II.** Pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ , on note  $t_X$  la translation de vecteur  $X$ .

**1.** Justifier que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{X \in \mathcal{R}} t_X(C).$$

**2.** Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont deux éléments distincts de  $\mathcal{R}$ , alors l'intersection des carrés  $t_X(C)$  et  $t_Y(C)$  est, soit un segment, soit un point, soit l'ensemble vide.

**III. 1.** Justifier que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{f \in G} f(T).$$

**2.** Montrer que si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux éléments distincts de  $G$ , alors l'intersection des triangles  $f_1(T)$  et  $f_2(T)$  est, soit un segment, soit un point, soit l'ensemble vide.

## Partie E : un sous-groupe et deux frises

I. Soit  $k$  un entier relatif. On considère les applications

$$t_k : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} x+k \\ y \end{pmatrix} \end{cases} \quad s_k : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} -x+k \\ -y \end{pmatrix} \end{cases}$$

1. Quelle est la nature géométrique de  $t_k$  et  $s_k$  ?

2. Soit  $k$  et  $l$  deux entiers relatifs. Décrire  $t_k \circ s_l$ ,  $s_k \circ t_l$ ,  $s_k \circ s_l$  et  $t_k \circ t_l$ .

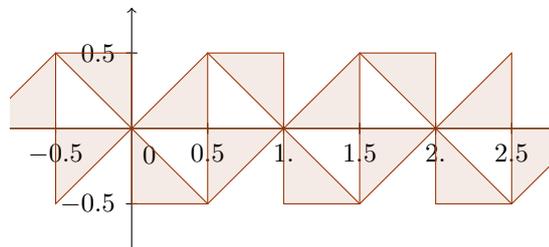
II. Soit  $H = \{t_k, s_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Montrer que  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .

III. On considère l'ensemble

$$F = \bigcup_{f \in H} f(T),$$

où  $T$  est le triangle défini dans la section D. Décrire l'ensemble  $F$ .

IV. On considère la frise suivante :



Montrer que le groupe des isométries qui conservent cette frise est un sous-groupe de  $G$  qu'on décrira.

## Problème n° 2

**Notations.**

$\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels.

Dans ce problème, on cherche à déterminer les applications  $f$  définies sur  $]0, +\infty[$  et à valeurs dans  $]0, +\infty[$  qui vérifient les deux propriétés suivantes :

(a) Pour tous nombres réels strictement positifs  $x$  et  $y$ ,

$$f(xf(y)) = yf(x).$$

(b)  $f$  est bornée sur  $]1, +\infty[$  : il existe un nombre réel  $A$  tel que pour tout nombre réel  $x \geq 1$ ,  $f(x) \leq A$ .

I. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $\varphi$  une application définie sur  $I$  et à valeurs dans  $I$ . On dit que  $\varphi$  est une involution de  $I$  si pour tout nombre réel  $x$  dans  $I$ ,

$$\varphi(\varphi(x)) = x.$$

1. Donner un exemple d'involution de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  autre que l'identité.

2. Donner un exemple d'involution de  $]0, +\infty[$  dans  $]0, +\infty[$  autre que l'identité.

3. Montrer qu'une involution de  $I$  dans  $I$  est bijective.

II. Soit  $f$  une fonction vérifiant les conditions **(a)** et **(b)**.

1. Soit deux nombres réels  $y_1, y_2$  strictement positifs tels que  $f(y_1) = f(y_2)$ . Montrer que  $y_1 f(1) = y_2 f(1)$ .

2. Montrer que  $f$  est injective.

3. Montrer que  $f(f(1)) = f(1)$  puis que  $f(1) = 1$ .

4. Montrer que  $f$  est une involution de  $]0, +\infty[$ .

5. Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. Montrer que  $f(ab) = f(a)f(b)$ .

*Indication* : on pourra poser  $y = f(b)$ .

III. On note  $F$  l'ensemble des points fixes de  $f$  :

$$F = \{x \in ]0, +\infty[, f(x) = x\}.$$

1. Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[, xf(x) \in F$ .

2. Montrer que  $1 \in F$ .

3. Montrer que si  $x$  et  $y$  sont des éléments de  $F$ , alors  $xy$  et  $\frac{x}{y}$  sont également des éléments de  $F$ .

4. Montrer que si  $x$  est un élément de  $F$ , alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $x^n$  est un élément de  $F$ .

5. Montrer que si  $x$  est un élément de  $F$ , alors  $x \leq 1$ .

*Indication* : on pourra considérer la suite  $(x^n)_{n \geq 0}$ .

6. Montrer que  $F = \{1\}$ .

7. En déduire  $f$ .

IV. Donner toutes les applications répondant au problème posé.