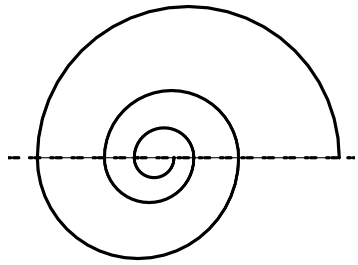
Thème : suites

L'exercice

Une spirale est formée par une succession de demi-cercles dont le rayon de l'un est égal aux deux tiers du rayon précédent. On suppose que le rayon du premier demi-cercle est 2 cm. Soit n un entier naturel non nul. On note L_n la longueur de la spirale obtenue par la succession de n demi-cercles.



1. Exprimer la longueur L_n en fonction de l'entier n.
2. Existe-t-il un entier n_0 à partir duquel $L_n \geqslant 5\pi$?
3. On augmente le nombre de demi-cercles. Que devient la longueur totale de la spirale obtenue ?

Les réponses de deux élèves de terminale S à la question 2.

Élève 1

	A	B
1	n	L_n
2	1	6,283 185 307 2
3	2	10,471 975 512 0
4	3	13,264 502 315 2
5	4	15,126 186 850 6
6	5	16,367 309 874 3
7	6	17,194 725 223 4
8	7	17,746 335 456 1
9	8	18,114 075 611 2
10	9	18,359 235 714 7
11	10	18,522 675 783 6

À l'aide d'un tableur, j'ai déterminé la valeur de l'entier n.
J'en déduis qu'à partir de $n = 5$, $L_n \geqslant 5\pi$.

Élève 2

Je résous l'équation :

$$\begin{aligned} 6\pi\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 5\pi &\iff 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{5}{6} \\ &\iff \frac{1}{6} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \\ &\iff n = \frac{-2\ln 2}{\ln 2 - \ln 3} \end{aligned}$$

J'en déduis qu'à partir de $n = 4$, $L_n \geqslant 5\pi$.

Le travail à exposer devant le jury

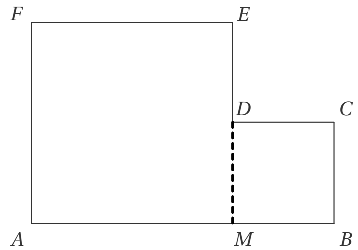
1 – Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence les acquis et les erreurs éventuelles.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.

3 – Proposez deux ou trois exercices sur le thème *suites* en explicitant pour chacun d'eux les différents objectifs pédagogiques visés.

Thème : problèmes avec prise d'initiative

L'exercice



On considère la figure suivante pour laquelle :

— $[AB]$ est un segment de longueur 8 cm,

— M est un point mobile sur le segment $[AB]$,

— $AMEF$ et $MBCD$ sont des carrés.

Pour quelles positions du point M le périmètre du polygone $ABCDEF$ est-il inférieur à 26 cm ?

D'après manuel Math'x Seconde, Didier.

Les réponses de trois élèves de seconde

Élève 1

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, j'ai construit la figure et j'ai affiché le périmètre du polygone. J'ai cherché à obtenir un périmètre de 26 cm *et en bougeant le point M, j'obtiens $AM = 3$ et $AM = 5$. Donc M doit être placé entre* 3 *et* 5.

Élève 2

J'ai calculé le périmètre du grand carré et du petit carré pour plusieurs valeurs avec un tableur pour aller plus vite :
En B2 : $= 4 * A2$
En C2 : $= 4 * (8 - A2)$
En D2 : $= B2 + C2 - 2 * (8 - A2)$ *car il faut retirer deux fois le segment en pointillés.*
Il faut donc que AM soit plus petit que 7 cm *mais quand je vérifie pour $AM = 0$, je ne trouve pas* 16 cm. *Ma formule doit être fausse.*

	A	B	C	D
1	AM	grand carré	petit carré	polygone
2	0	0	32	16
3	1	4	28	18
4	2	8	24	20
5	3	12	20	22
6	4	16	16	24
7	5	20	12	26
8	6	24	8	28
9	7	28	4	30
10	8	32	0	32

Élève 3

Je pose $x = AM$.
$P = x + (8 - x) + (8 - x) + (8 - x) + (x - (8 - x)) + x + x = 16 + 2x$
$16 + 2x < 26$
$2x < 10$
$x < 5$
Le point M doit être à moins de 5 cm *du point A.*
En fait, par symétrie, il faudrait aussi que x soit plus grand que 3 cm.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la démarche de chaque élève en mettant en évidence leurs compétences en termes de prise d'initiative et en précisant les conseils que vous pouvez apporter à chacun d'eux.

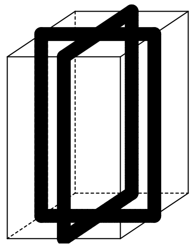
2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposez trois exercices sur le thème *problèmes avec prise d'initiative*, dont l'un au niveau collège, en prenant soin de motiver vos choix.

Thème : optimisation

L'exercice

On entoure une boîte avec un ruban de longueur totale 1,20 m dont 20 cm ont permis de réaliser le nœud. La boîte est un pavé droit à base carrée et le ruban passe par les milieux des arêtes des faces supérieure et inférieure (comme indiqué sur le schéma ci-dessous).



Parmi toutes les boîtes que l'on peut ainsi envisager, en existe-t-il une de volume maximal ?
Si oui, préciser ce volume et les dimensions de la boîte ; sinon, justifier.

Les réponses de deux élèves de première

Élève 1

J'ai réalisé un tableau de valeurs avec une colonne A pour le côté du carré, une colonne B pour la hauteur et une colonne C pour le volume.
J'ai tapé : $A2 = A1 + 0{,}1$ *puis* $B1 = 0{,}25 - A1$ *et* $C1 = A1 * A1 * B1$ *et ensuite, j'ai tiré les formules vers le bas. Après, pour être plus précis, j'ai diminué plusieurs fois le pas dans la colonne A.*

	A	B	C
1	0	0,25	0
2	0,1	0,15	0,0015
3	0,2	0,05	0,002
4	0,3	−0,05	−0045

Je trouve un volume maximal de 0,002 314 787 m^3 *avec un côté du carré de* 16,7 cm *et une hauteur de* 8,3 cm.

Élève 2

En notant x le côté du carré et h la hauteur, on a un mètre de ruban avec $4x + 4h$.
$4x + 4h = 1$ *donc* $h = 1 - x$ *et le volume est donné par* $V(x) = x^2(1 - x)$.
Je dérive : $V'(x) = 2x \times (-1) = -2x$
La dérivée s'annule seulement en 0 et le volume est alors égal à 0. Je ne crois pas qu'il y ait de volume maximal.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première, en vous appuyant sur les productions des élèves.

3 – Proposez deux ou trois exercices sur le thème *optimisation*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : différents types de raisonnement

L'exercice

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 4u_n - 3$ avec $u_0 = 6$.

1. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier :
   (a) Pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_n}{3}$ est un nombre premier.
   (b) Pour tout entier naturel n, $u_n = 5 \times 4^n + 1$.
   (c) u_n est impair si et seulement si n est différent de 0.
2. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que u_n soit supérieur à 10^6.

Extrait du programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques de la classe terminale de la série scientifique

Notations et raisonnement mathématiques :

En complément des objectifs rappelés ci-dessous, le travail sur la notion d'équivalence doit naturellement être poursuivi (propriété caractéristique, raisonnement par équivalence) et l'on introduit le raisonnement par récurrence.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

— *à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;*

— *à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;*

— *à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;*

— *à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;*

— *à formuler la négation d'une proposition ;*

— *à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;*

— *à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.*

Le travail à exposer devant le jury

1 – Expliquez en quoi cet exercice répond aux recommandations du paragraphe « Notations et raisonnement mathématiques » inséré dans le programme de la classe de terminale scientifique.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique en mettant en valeur les différents types de raisonnement utilisés.

3 – Proposez deux exercices, un au niveau lycée et un au niveau collège, sur le thème *différents types de raisonnement*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.