



Concours externe du Capes et Cafep - Capes

Section mathématiques

Programme de la session 2020

Première épreuve d'admissibilité

Programme de l'option mathématiques

Raisonnement et vocabulaire ensembliste.

Opérateurs logiques et quantificateurs. Vocabulaire de la théorie des ensembles. Applications, relations d'ordre et relations d'équivalence.

Nombres complexes.

Module et argument. Racines n^{mes} de l'unité. Exponentielle complexe, trigonométrie. Application à la géométrie plane. Équation du second degré.

Fonctions d'une variable réelle.

Continuité, théorème des valeurs intermédiaires. Dérivabilité, théorème de Rolle, inégalité des accroissements finis. Extension aux fonctions à valeurs complexes. Fonctions à valeurs dans \mathbf{R}^2 . Courbes paramétrées.

Calcul intégral et Équations différentielles.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment, sommes de Riemann. Calculs de primitives. Intégration par parties, changement de variable. Formule de Taylor avec reste intégral. Intégrales généralisées. Équations différentielles linéaires du premier ordre, du premier ordre à variables séparables, linéaires du second ordre à coefficients constants.

Nombres réels et suites réelles.

Construction de \mathbf{N} , \mathbf{Z} et \mathbf{Q} . Présentation axiomatique de \mathbf{R} , bornes supérieure et inférieure. Valeurs approchées, nombres décimaux. Limite d'une suite réelle, théorèmes d'existence. Suites extraites. Extension aux suites à valeurs complexes. Séries numériques, séries à termes positifs, séries absolument convergentes, séries de références (séries géométriques, séries de Riemann).

Suites et séries de fonctions.

Convergence simple, convergence uniforme. Théorèmes de régularité. Convergence normale des séries de fonctions. Séries entières, rayon de convergence. Développement en série entière des fonctions usuelles.

Analyse asymptotique.

Relations de comparaisons des suites et des fonctions. Développements limités.

Algèbre linéaire.

Systèmes linéaires, algorithme du pivot de Gauss-Jordan. Espaces vectoriels de dimension finie, familles libres, familles génératrices, bases. Applications linéaires. Homothéties, projections et symétries. Rang d'une application linéaire. Représentations matricielles d'un endomorphisme. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées : éléments propres, diagonalisation, trigonalisation.

Matrices et déterminants.

Calcul matriciel, matrices inversibles, transposition. Matrices et applications linéaires, changement de bases. Équivalence, similitude. Déterminant d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Dénombrement.

Cardinal d'un ensemble fini, listes, combinaisons, factorielles, formule du binôme.



Arithmétique des entiers.

Arithmétique des entiers : nombres premiers, PGCD, PPCM, algorithme d'Euclide. Sous-groupes de \mathbf{Z} . Congruences. Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Théorème des restes chinois, petit théorème de Fermat.

Polynômes.

Arithmétique des polynômes à coefficients réels ou complexes. Racines. Décomposition dans $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$.

Groupes.

Sous-groupes, morphismes de groupes. Groupes monogènes et groupes cycliques : groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, groupe des racines n -ièmes de l'unité ; générateurs, indicatrice d'Euler. Ordre d'un élément. Groupes symétriques. Exemples de groupes agissant sur un ensemble, exemples de groupes laissant invariante une partie du plan ou de l'espace.

Produit scalaire et espaces euclidiens.

Produit scalaire sur un espace de dimension finie, norme associée, orthogonalité. Bases orthonormées. Projections orthogonales. Orientation. Groupes des isométries vectorielles d'un espace euclidien, des isométries affines d'un espace euclidien, des similitudes d'un espace euclidien. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3. Isométries affines du plan euclidien.

Probabilités.

Espaces probabilisés finis. Probabilités conditionnelles, conditionnement et indépendance.

Variations aléatoires sur un univers fini : lois usuelles (lois uniformes, lois binomiales), variables aléatoires indépendantes, espérance, variance et écart-type.

Variations aléatoires discrètes : espérance, variance et écart-type. Lois de Poisson, lois géométriques.

Variations à densité : espérance et variance. Lois uniformes, lois exponentielles.