*L'ensemble du sujet porte sur la notion de **produit** dans l'enseignement des mathématiques.*
Il est composé de deux parties :

- *les questions posées au candidat (pages 1 à 4) ;*
- *le dossier composé de plusieurs annexes, sur lesquelles portent ces questions (pages 5 à 14).*

Concevoir des situations d'enseignement

Produit de nombres réels

1. Dans un QCM, les réponses fausses proposées, appelées *distracteurs*, correspondent en général à des erreurs courantes. Analyser les distracteurs du QCM en annexe 1.

2. Comment pourrait-on rédiger et illustrer les deux propriétés suivantes afin qu'elles soient accessibles aux élèves :
   - commutativité de la multiplication au cycle 3 ?
   - distributivité de la multiplication par rapport à l'addition au cycle 4 ?

3. Expliquer en quoi le programme du cycle 4 (extrait en annexe 3) invite à prendre en compte l'extrait du roman *La vie de Henry Brulard* (annexe 2).

4. En exploitant le calcul $-2 \times (-5 + 5)$, rédiger une explication qui permet de légitimer le signe du produit de -2 par -5 avec des élèves de collège.

5. Dans l'extrait du *Discours de la Méthode* (annexe 4), René Descartes présente une construction géométrique des opérations de base, dont la multiplication.

   a. Quel élément du programme de collège permet de justifier que $\mathrm{BE} = \mathrm{BD} \times \mathrm{BC}$ sur la figure de l'annexe 4.
   b. Rédiger un programme de construction à la règle et au compas permettant de placer le produit ab des deux nombres réels strictement positifs a et b sur la ligne numérique de l'annexe 4.
   c. Quels éléments du programme (annexe 5) pourraient inciter un professeur à proposer cette activité en classe de seconde ?

Approfondir une procédure automatisée

Algorithme de la multiplication des nombres entiers

Un enseignant propose à une classe de seconde la situation en annexe 6 et recueille la production d'élève de l'annexe 7.

6. a. Pour la question a), comment amener l'élève à identifier son erreur ?
   b. Pour la question b), proposer un « coup de pouce » afin d'aider l'élève à poursuivre son raisonnement.

7. Rédiger une correction de la question b) telle qu'elle pourrait figurer dans un cahier d'élève.

8. Quelles intentions du programme (annexe 5) ont pu guider le choix de cette situation ?

9. Citer un exemple d'application des mathématiques qui nécessite de calculer le produit de très grands nombres entiers.

Rectifier des représentations

Agrandissement d'une figure

Un enseignant propose la situation présentée en annexe 8 à des élèves de sixième.

10. La production d'un groupe d'élèves est donnée en annexe 9. Quelle conception ces élèves semblent-ils avoir de la notion d'agrandissement ?

L'enseignant prend soin de rappeler aux élèves ce que désigne le mot *agrandissement* en mathématiques.

11. Donner deux arguments justifiant l'intérêt pédagogique d'organiser un travail en groupes.

12. À partir de la situation initiale, quel prolongement pourrait être proposé à des élèves ayant réussi l'activité ? Justifier brièvement ce choix.

Analyser des productions d'élèves.

Raisonnement

Un enseignant propose l'exercice de l'annexe 10 à une classe de seconde.

13. En se référant à l'annexe 11, préciser à quel type de tâche correspond cet exercice ?

14. Analyser les réussites et les erreurs des élèves dont les productions figurent en annexe 12.

Un enseignant donne la consigne suivante à des élèves d'une classe de seconde : *« Comparer un nombre réel positif à son carré ».*

15. Comment expliquer la conception du produit de deux nombres que semble avoir l'élève de l'annexe 13 ? Comment l'aider à percevoir son erreur de raisonnement ?

16. L'enseignant souhaite s'appuyer sur une conjecture avant de s'engager dans la démonstration. Comment peut-il procéder ?

17. Proposer une correction de cet exercice telle qu'elle pourrait être rédigée dans un cahier d'élève de seconde.

Un enseignant propose le problème en annexe 15 à une classe de première.

18. En se référant à l'annexe 14, identifier deux compétences particulièrement mobilisées dans la dernière question de ce problème. Justifier succinctement.

19. L'enseignant modifie l'énoncé du problème (annexe 16). Quelle nouvelle compétence mathématique souhaite-t-il ainsi mobiliser ?

20. Analyser les réussites et les erreurs des deux réponses de l'annexe 17.

21. En s'appuyant sur les deux productions d'élèves, proposer une correction de l'exercice de l'annexe 16 telle qu'elle pourrait figurer dans un cahier d'élève de première.

Préparer une séquence d'enseignement

Produit scalaire

22. Rédiger les démonstrations des propriétés de l'annexe 18 telles qu'elles pourraient figurer dans un cahier de cours de première spécialité mathématiques. *Pour la première propriété, on se limitera au cas où le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) appartient à la demi droite [AB).*

23. Un professeur envisage de démontrer la commutativité du produit scalaire et la distributivité par rapport à l'addition.
    a. Rédiger la trace écrite qui pourra figurer dans les cahiers des élèves, en précisant pour chaque démonstration les éléments de l'annexe 18 que l'on utilise.
    b. Quelle explication pourrait donner le professeur à un élève qui s'étonnerait que l'on ne démontre pas l'associativité ?

24. En exploitant le produit scalaire, rédiger les démonstrations des deux propriétés de trigonométrie suivantes, telles qu'elles pourraient figurer dans un cahier de cours d'un élève de terminale suivant l'option *mathématiques expertes*.

$$cos(a+b) \ = \ cos(a) \times cos(b) - sin(a) \times sin(b)$$
$$cos(a-b) \ = \ cos(a) \times cos(b) + sin(a) \times sin(b)$$

25. Expliciter le lien entre les formules de trigonométrie de la question précédente et le produit de deux nombres complexes.

26. Rédiger une démonstration de la formule de Moivre, rappelée ci-dessous, telle qu'elle pourrait figurer dans des cahiers de cours d'élèves de terminale suivant l'option *mathématiques expertes*.

> *Formule de Moivre*
> Pour tout réel θ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta}$

Consolider des apprentissages

Nombres complexes

27. Un enseignant souhaite mettre en avant l'importance du choix de la forme d'écriture des nombres complexes. Identifier pour chacun des exercices de l'annexe 19 l'écriture à privilégier pour s'engager dans la résolution de l'exercice. Justifier ces choix.

28. Rédiger une correction du premier exercice de l'annexe 19 telle qu'elle pourrait figurer dans le cahier d'un élève de terminale suivant l'option mathématiques expertes.

Exploiter des erreurs d'élèves

Arithmétique

29. Rédiger une démonstration de la propriété de l'annexe 20 telle qu'elle pourrait figurer dans les cahiers d'une classe suivant l'option mathématiques expertes.

30. Un enseignant propose l'exercice de l'annexe 21 dans la même classe.
    a. Quelle démarche de l'élève conduit à un résultat erroné dans l'annexe 21 ?
    b. Proposer une correction de l'exercice telle qu'elle pourrait figurer dans un cahier d'élève.
    c. Proposer une modification de l'énoncé qui permettrait de rendre valide un raisonnement similaire à celui utilisé par l'élève. Expliciter et démontrer la propriété mobilisée dans ce cas.

31. a. Analyser les réussites et les erreurs des élèves dont la production figure en annexe 22.
    b. Proposer une correction de l'exercice en s'appuyant sur la production de l'élève 2

Produits définis sur différents ensembles

32. Quelle différence majeure existe-t-il dans les ensembles considérés entre le produit de nombres réels et le produit scalaire de vecteurs ?

33. Citer un objet mathématique qu'un élève peut rencontrer au cours de sa scolarité dans le secondaire pour lequel la multiplication n'est pas commutative. Illustrer la réponse par un exemple.

34. Dans quel ensemble étudié dans l'enseignement supérieur, la propriété démontrée à la question 29 permet-elle de définir un produit ?

Annexes

Annexe 1 : QCM (d'après Delta Cycle 4, Belin)

	Réponse A	*Réponse B*	*Réponse C*
1°) $-7(x-3) = \cdots$	$-7x - 10$	$-7x - 21$	$-7x + 21$
2°) Une factorisation de $2x^2 - 10x$ est …	$2x(2x - 10)$	$x(2x^2 - 10)$	$2x(x - 5)$
3°) Laquelle des trois expressions est factorisée ?	$3x(x - 8)$	$(4x + 1)(5x - 6) + x^2$	$(3x + 5) - (x + 9)$

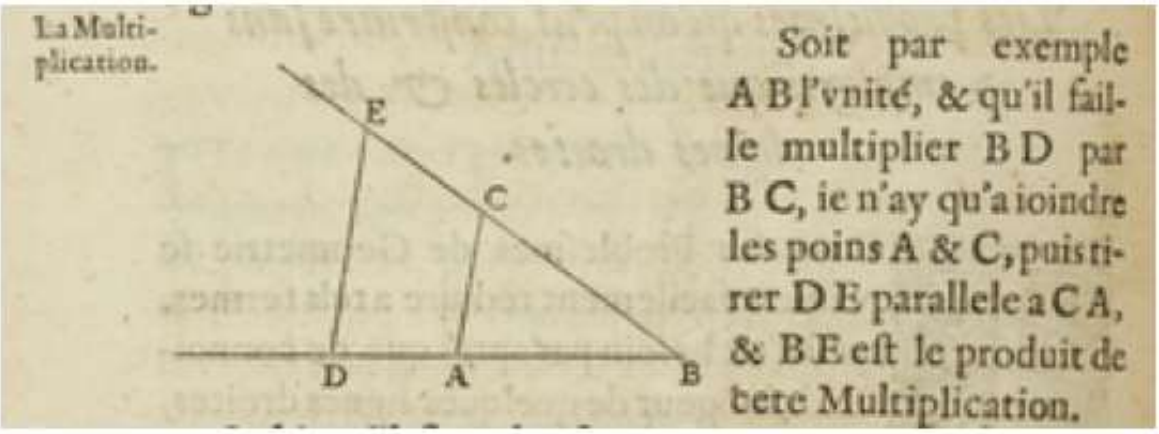
Annexe 2 : la vie de Henry Brulard (œuvre autobiographique inachevée de Stendhal)

Mon enthousiasme pour les mathématiques avait peut-être eu pour base principale mon horreur pour l'hypocrisie […]. Suivant moi l'hypocrisie était impossible en mathématiques et, dans ma simplicité juvénile, je pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que : moins par moins donne plus (– × – = +) ? C'est une des bases fondamentales de la science qu'on appelle algèbre. […] Je me rappelle distinctement que, quand je parlais de ma difficulté de moins par moins à un fort, il me riait au nez *[…]. M. Chabert pressé par moi s'embarrassait, répétait sa leçon, celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire : « Mais c'est l'usage, tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange, qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admise… »*

Annexe 3 : extrait du programme de mathématiques du cycle 4

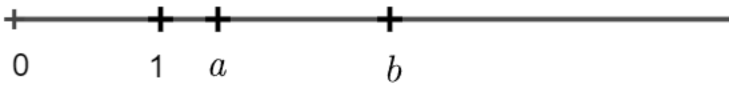
Le programme du cycle 4 permet d'initier l'élève à différents types de raisonnement […]. La démonstration, forme d'argumentation propre aux mathématiques, vient compléter celles développées dans d'autres disciplines et contribue fortement à la formation de la personne et du citoyen (domaine 3 du socle). L'apprentissage de la démonstration doit se faire de manière progressive, à travers la pratique (individuelle, collective, ou par groupes), mais aussi par l'exemple. C'est pourquoi il est important que le cours de mathématiques ne se limite pas à l'application de recettes et de règles, mais permette de mettre en place quelques démonstrations accessibles aux élèves.

Annexe 4 : extrait du troisième essai du Discours de la Méthode (Descartes, 1637)


La Multiplication.

Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E est le produit de cete Multiplication.

Ligne numérique



Annexe 5 : extraits du préambule du programme de seconde générale et technologique

Intentions majeures

(…)

L'enseignement des mathématiques de la classe de seconde est conçu à partir des intentions suivantes :

- permettre à chaque élève de consolider les acquis du collège et une culture mathématique de base, de développer son goût des mathématiques, d'en apprécier les démarches et les objets afin qu'il puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques ainsi que de la simplification et de la généralisation que permet la maîtrise de l'abstraction ;
- préparer au choix de l'orientation : choix de la spécialité mathématiques dans la voie générale, choix de la série dans la voie technologique ;
- assurer les bases mathématiques nécessaires à toutes les poursuites d'études au lycée.

(…)

Organisation du programme

Le programme s'organise en cinq grandes parties : « Nombres et calculs », « Géométrie », « Fonctions », « Statistiques et probabilités » et « Algorithmique et programmation ». Ce découpage n'est pas un plan de cours et il est essentiel d'exploiter les possibilités d'interaction entre ces parties. Les connaissances du collège sont systématiquement réactivées à travers des problèmes.

Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc.

Le programme propose un certain nombre d'approfondissements possibles, mais en aucun cas obligatoires. Ils peuvent permettre une différenciation pédagogique.

Il peut être judicieux d'éclairer le cours par des éléments de contextualisation d'ordre historique, épistémologique ou culturel. L'histoire peut aussi être envisagée comme une source féconde de problèmes clarifiant le sens de certaines notions. Les items « Histoire des mathématiques » identifient quelques possibilités en ce sens. Pour les étayer, le professeur peut s'appuyer sur l'étude de documents historiques.

Annexe 6 : la méthode de Karatsuba (d'après Accromaths, volume 17, 2022)

Multiplication

```
                45 758 780
              × 96 803 528
          ----------------
               366 070 240
               915 175 600
            22 879 390 000
           137 276 340 000
                         0
        36 607 024 000 000
       274 552 680 000 000
     4 118 290 200 000 000
     ---------------------
     4 429 611 340 975 840
```

Ré-apprendre à multiplier avec la méthode de Karatsuba.

Pour multiplier 45 758 780 par 96 803 528 sans calculatrice, vous avez appris à écrire les nombres l'un en-dessous de l'autre, puis à multiplier le nombre du haut par le chiffre des unités du facteur écrit en bas, puis par le chiffre des dizaines, etc. Le processus est long car il nécessite de nombreuses multiplications intermédiaires. Il a fallu attendre le XX^e siècle pour voir apparaître une méthode plus efficace.

Peut-on faire mieux ?

Lorsque l'on effectue le produit de deux grands nombres, c'est le nombre de multiplications intermédiaires qui importe car il est beaucoup plus grand que le nombre d'additions intermédiaires.

En 1960, le mathématicien Andreï Kolmogorov invita ses étudiants à chercher une méthode qui réduit le nombre de multiplications intermédiaires par rapport à l'algorithme que l'on apprend à l'école. Anatoli Karatsuba, âgé de seulement 23 ans, décrivit un procédé qui répond à cette contrainte.

Ainsi, dans l'exemple décrit ci-contre, la méthode de « Karatsuba » ne nécessite que trois multiplications intermédiaires. Le gain peut paraître minime mais en réitérant le procédé, on réduit le nombre de d'opérations intermédiaires de façon significative. S'il s'agit d'effectuer le produit de deux nombres de 300 chiffres, la méthode de « Karatsuba » permet de le diviser par 10 environ !

Exemple pour multiplier 24 par 68

1. *Séparer les dizaines et les unités des facteurs et effectuer leur produit :*

   2|4   6|8 → $2 \times 6 = 12$ $4 \times 8 = 32$

2. *Effectuer les sommes :*

   2|4   6|8 → $2 + 4 = 6$ $6 + 8 = 14$

3. *Effectuer les produits des résultats obtenus :*

   $6 \times 14 = 84$

4. *Soustraire à ce résultat les deux produits obtenus à l'étape n°1 :*

   $84 - 12 - 32 = 40$

5. *Effectuer le calcul suivant :*

   $1200 + 400 + 32 = 1632$

Questions sur le document

a) Pour effectuer le produit de deux nombres entiers à n chiffres, combien de multiplications intermédiaires nécessite la méthode que l'on apprend à l'école ?
b) Expliquer la méthode de « Karatsuba » décrite dans l'exemple ci-dessus et démontrer qu'elle fonctionne pour effectuer le produit de deux nombres entiers à deux chiffres.

Annexe 7 : production d'un élève

a) Pour multiplier deuse nombres à 2 chiffres il faut 4 multiplications intermédiaires, donc pour multiplier deux nombres à n chiffres il faut $2n$ multiplications intermédiaires.

b) Pour le premier nombre, j'appelle d son chiffre des dizaines et u son chiffre des unités.

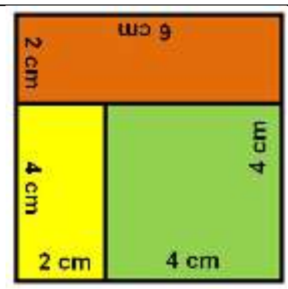
Pour le second nombre, j'appelle e son chiffre des dizaines et v son chiffre des unités.

Avec la méthode de Karatruba, on fait

$d \times e$; $u \times v$; $(d+u)(e+v)$

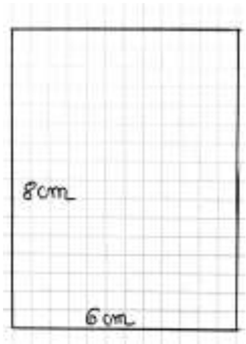
Ça fait 3 multiplications au lieu de 4 mais je ne comprends pas pourquoi ça marche.

Annexe 8 : document ressource pour le cycle 3 (Eduscol, 2016)

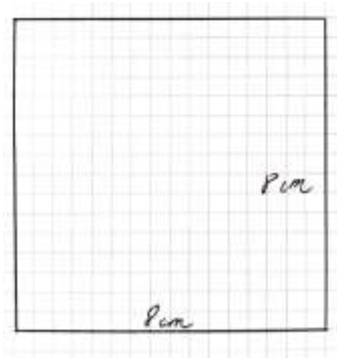
Agrandis les 3 pièces de la figure de façon à ce que les segments mesurant 2 cm mesurent finalement 6 cm.	

Annexe 9 : production d’un groupe de trois élèves

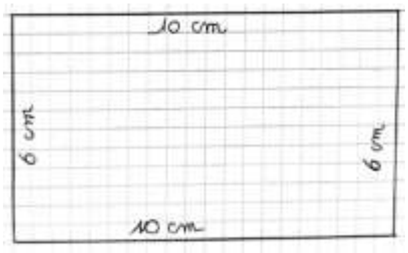
L’élève 1 a agrandi le rectangle de dimensions 4 cm$\times$ 2 cm.



L’élève 2 a agrandi le carré de côté 4 cm.



L’élève 3 a agrandi le rectangle de dimensions 6 cm$\times$ 2 cm.

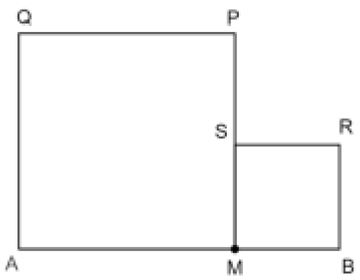


Annexe 10 : énoncé d’un exercice

[AB] est un segment de longueur 10.

On place le point M sur le segment [AB] et on construit les carrés AMPQ et BRSM comme sur la figure ci-contre.

Où faut-il placer le point M pour que l’aire du carré AMPQ soit le double de l’aire du carré BRSM ?



Annexe 11 : extrait du programme de mathématiques de seconde générale et technologique

Diversité de l’activité de l’élève

La mise en œuvre du programme doit permettre aux élèves d’acquérir des connaissances, des méthodes et des démarches spécifiques.
La diversité des activités concerne aussi bien les contextes (internes aux mathématiques ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d’autres disciplines) que les types de tâches proposées : « questions flash » pour favoriser l’acquisition d’automatismes, exercices d’application et d’entraînement pour stabiliser et consolider les connaissances, exercices et problèmes favorisant les prises d’initiatives, mises au point collectives d’une solution, productions d’écrits individuels ou collectifs, etc.
Il importe donc que cette diversité se retrouve dans les travaux proposés à la classe. Parmi ceux-ci, les travaux écrits faits hors du temps scolaire permettent, à travers l’autonomie laissée à chacun, le développement des qualités de prise d’initiative ou de communication ainsi que la stabilisation des connaissances et des méthodes étudiées. Ils doivent être conçus de façon à prendre en compte la diversité des élèves. Le calcul est un outil essentiel pour la résolution de problèmes. Il est important en classe de seconde de poursuivre l’acquisition d’automatismes initiée au collège. L’installation de ces automatismes est favorisée par la mise en place d’activités rituelles, notamment de calcul (mental ou réfléchi, numérique ou littéral). Elle est menée conjointement avec la résolution de problèmes motivants et substantiels, afin de stabiliser connaissances, méthodes et stratégies.

Annexe 12 : productions d'élèves

Élève 1

Pour que l'aire du carré AMPQ soit le double de l'aire du carré BMSR il faut que la distance AM soit le double de la distance BM. On partage donc le segment [AB] en trois parts égales

$AM = \frac{20}{3}$ et $BM = \frac{10}{3}$

Élève 2

On doit résoudre l'équation $x^2 = 2(10-x)^2$

$$\begin{aligned} x^2 = 2(10-x)^2 &\iff x^2 = 2(100 - x^2) \\ &\iff x^2 = 200 - 2x^2 \\ &\iff 3x^2 = 200 \\ &\iff x^2 = \frac{200}{3} \\ &\iff x = \sqrt{\frac{200}{3}} \approx 8{,}16 \text{ (car } x \text{ est positif)} \end{aligned}$$

Élève 3

On note c le côté du premier carré. Le côté du 2ème carré est 10 - c.

L'aire du premier carré est c^2 et l'aire du deuxième carré est $(10-c)^2$

Il faut donc que $c^2 = 2(10-c)^2$

$$\begin{aligned} c^2 = 2(10-c)^2 &\iff c^2 - 2(10-c)^2 = 0 \\ &\iff [c + 2(10-c)][c - 2(10-c)] = 0 \\ &\iff (c + 20 - 2c)(c - 20 + 2c) = 0 \\ &\iff (-c + 20)(3c - 20) = 0 \\ &\iff c = 20 \text{ ou } 3c - 20 = 0 \\ &\iff c = 20 \text{ ou } 3c = 20 \\ &\iff c = 20 \text{ ou } c = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

Or un côté ne peut être négatif donc la longueur du côté est $\frac{20}{3}$

Annexe 13 : production d'un élève

$x < x^2$ car $x^2 = x \times x$ et quand on multiplie on agrandit

Annexe 14 : les compétences mathématiques au lycée (Eduscol, 2013)

Chercher

Analyser un problème.
Extraire, organiser et traiter l'information utile.
Observer, s'engager dans une démarche, expérimenter en utilisant éventuellement des outils logiciels, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, reformuler un problème, émettre une conjecture.
Valider, corriger une démarche, ou en adopter une nouvelle.

Modéliser

Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide d'équations, de suites, de fonctions, de configurations géométriques, de graphes, de lois de probabilité, d'outils statistiques …).
Utiliser, comprendre, élaborer une simulation numérique ou géométrique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel.
Valider ou invalider un modèle.

Représenter

Choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique…) adapté pour traiter un problème ou pour représenter un objet mathématique.
Passer d'un mode de représentation à un autre.
Changer de registre.

Calculer

Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel).
Mettre en œuvre des algorithmes simples.
Exercer l'intelligence du calcul : organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir des transformations, effectuer des simplifications.
Contrôler les calculs (au moyen d'ordres de grandeur, de considérations de signe ou d'encadrement).

Raisonner

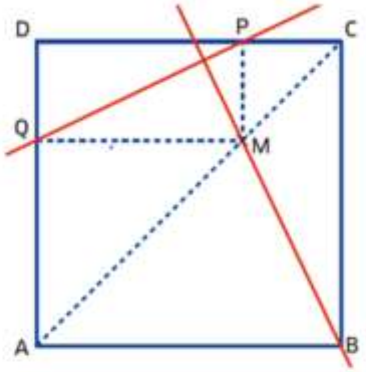
Utiliser les notions de la logique élémentaire (conditions nécessaires ou suffisantes, équivalences, connecteurs) pour bâtir un raisonnement.
Différencier le statut des énoncés mis en jeu : définition, propriété, théorème démontré, théorème admis…
Utiliser différents types de raisonnement (par analyse et synthèse, par équivalence, par disjonction de cas, par l'absurde, par contraposée, par récurrence…).
Effectuer des inférences (inductives, déductives) pour obtenir de nouveaux résultats, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture, prendre une décision.

Communiquer

Opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel.
Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit ou à l'oral.
Critiquer une démarche ou un résultat.
S'exprimer avec clarté et précision à l'oral et à l'écrit.

Annexe 15 : énoncé d'un exercice (Métamaths Première, Belin)

36 ABCD est un carré de côté égal à 4. M est un point de la diagonale [AC]. P et Q sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (CD) et sur (DA).
On veut démontrer que les droites (PQ) et (BM) sont perpendiculaires. Pour cela, on se place dans le repère orthonormé d'origine A et tel que B et D ont respectivement pour coordonnées (4 ; 0) et (0 ; 4) : il s'agit du repère $\left(A ; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$.
On note x l'abscisse de M.
1. Déterminer en fonction de x les coordonnées de tous les points de la figure.
2. Conclure.

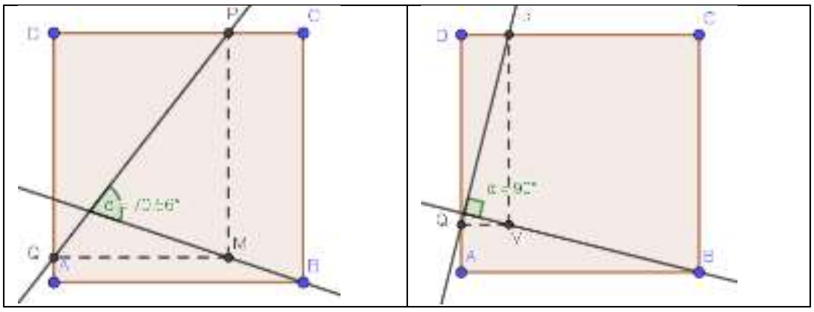


Annexe 16 : énoncé modifié

ABCD est un carré.
On considère un point M qui se situe à l'intérieur du carré ABCD.
Le point P est le projeté orthogonal du point M sur la droite (CD).
Le point Q est le projeté orthogonal du point M sur la droite (AD).
Où faut-il placer le point M *pour que les droites (*BM*) et (*PQ*) soient perpendiculaires ?*

Annexe 17 : productions d'élèves

Élève 1



Avec différents essais sur Géogebra, j'ai trouvé qu'il fallait que le point M soit sur la diagonale du carré pour que les droites (BM) et (PQ) soient perpendiculaires

Élève 2

Je me suis placé dans le repère du carré et en posant M$(x ; y)$ j'obtiens : $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Rightarrow x(x-1)+y(1-y)=0 \Leftrightarrow x=y$

Annexe 18 : extrait d'un manuel (MATHS 1re spécialité, Magnard)

1 Produit scalaire, colinéarité et orthogonalité de vecteurs

Définition Avec le cosinus

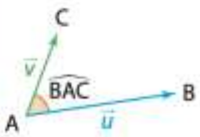
• On appelle **produit scalaire de ces deux vecteurs non nuls**, le réel défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, le produit scalaire s'écrit :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

• De plus si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$



2 Autres définitions et propriétés

Propriété Produit scalaire avec les normes

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$.

Propriété Produit scalaire avec les coordonnées

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

Annexe 19 : énoncés d'exercices

Exercice 1 (Hyperbole, terminale mathématiques expertes, Nathan)

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = (1+i)^n + (1-i)^n$$

Démontrer que pour tout entier naturel n, S_n est un nombre réel.

Exercice 2 (Sésamath, terminale mathématiques expertes, Magnard)

On considère le suite (z_n) définie par $z_0 = i$ et pour $n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, z_{3n} = z_0$.

Annexe 20 : extrait d'un manuel (Hyperbole, terminale, mathématiques expertes, Nathan)

Congruences

a et *b* désignent deux nombres entiers relatifs et *n* un nombre entier naturel, $n \geqslant 2$.

Définition

Dire que *a* et *b* sont congrus modulo *n* signifie que *a* et *b* ont le même reste dans la division euclidienne par *n*.
On note $a \equiv b\ [n]$ ou $a \equiv b\ (n)$ ou $a \equiv b\ (\text{mod} n)$.

c et *d* désignent également des nombres entiers relatifs.

Propriétés

Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$ alors $ac \equiv bd\ [n]$

Annexe 21 : production d'un élève

Énoncé de l'exercice

Résoudre dans l'ensemble des nombres relatifs l'équation $x^2 \equiv 1[8]$

$x^2 \equiv 1[8] \Leftrightarrow x^2 - 1 \equiv 0[8]$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) \equiv 0[8]$

$\Leftrightarrow x - 1 \equiv 0[8]$ ou $x + 1 \equiv 0[8]$

$\Leftrightarrow x \equiv 1[8]$ ou $x \equiv 7[8]$

Annexe 22 : productions d'élèves

Énoncé de l'exercice

Combien existe-t-il d'entiers naturels inférieurs à 6000 et qui sont premiers avec ce nombre ?

Élève 1

pour 6 : 1 2 3 4 5 6 Il y a 2 nombres premiers avec 6

pour 10 : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 Il y a 4 nombres premiers avec 10

pour 10^3 il y en a $4^3 = 64$

Donc pour $6000 = 6 \times 10^3$ il y a $2 \times 64 = 128$ nombres premiers avec 6000

Élève 2

```python
from math import *

def algo(n):
    compteur=0
    for k in range(1,n):
        if n/k==int(n/k):
            compteur=compteur+1
    return(n-compteur)
```

```
Console
>>> algo(6000)
5961
```