



**MINISTÈRES
ÉDUCATION
JEUNESSE
SPORTS
ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR
RECHERCHE**

*Liberté
Égalité
Fraternité*

Direction générale des ressources humaines

RAPPORT DU JURY

SESSION 2026

Concours : Troisième concours du CAPES et du CAFEP-CAPES

Section : Mathématiques

Rapport de jury présenté par :

Armelle POUTREL

Inspectrice générale de l'éducation, du sport et de la recherche

Présidente du jury

Conseil aux futurs candidats

Il est recommandé aux candidats de s'informer sur les modalités du concours.

Les renseignements généraux (conditions d'accès, épreuves, carrière, etc.) sont donnés sur le site du ministère de l'Éducation nationale :

<http://www.devenirenseignant.gouv.fr>

Le jury du CAPES externe de Mathématiques met à disposition des candidats et des formateurs un site spécifique :

<http://capes-math.org/>

L'épreuve écrite de cette session s'est tenue le 12 mars 2026.

Les épreuves orales se sont déroulées du 2 au 5 juin 2026, dans les locaux du lycée Frédéric Chopin à Nancy.

Le jury tient une nouvelle fois à remercier l'équipe de direction et l'ensemble des personnels du lycée Chopin pour la qualité de leur accueil. Il convient également de saluer le travail des informaticiens et des appariteurs, dont l'engagement contribue largement au bon déroulement des épreuves, ainsi que l'accompagnement efficace de la division des examens et concours du rectorat de Nancy-Metz.

Table des matières

1. Présentation du concours	4
1.1 DEFINITION DES EPREUVES	4
1.2 PROGRAMME DU CONCOURS.....	5
1.3 COMPOSITION DU JURY	5
2. Quelques statistiques	6
2.1 HISTORIQUE	6
2.2 REPARTITION DES NOTES : EPREUVE D'ADMISSIBILITE.....	7
2.3 REPARTITION DES NOTES : EPREUVES D'ADMISSION	7
2.4 REPARTITION DES NOTES : TOTAL	9
2.5 AUTRES DONNEES	10
3. Énoncés	12
3.1 SUJET DE L'ÉPREUVE ECRITE	12
3.2 SUJETS DE L'ÉPREUVE DE LEÇON	12
4. Analyse et commentaires	13
4.1 ÉPREUVE ECRITE	13
4.2.1 L'ÉPREUVE DE LEÇON	19
4.2.2 L'ÉPREUVE D'ENTRETIEN.....	22
5. Annexe : sujet de l'épreuve écrite.....	255
6. Annexe : ressources mises à disposition des candidats	333

1. Présentation du concours

1.1 Définition des épreuves

Les concours de recrutement de professeurs certifiés sont régis par l'arrêté du 25 janvier 2021 modifié (MENH2033181A).

A. - Épreuve d'admissibilité

L'épreuve permet d'apprécier la connaissance des notions du programme et l'aptitude à les mobiliser pour résoudre des problèmes. Elle sollicite également les capacités de raisonnement, de démonstration et d'expression écrite du candidat.

Le sujet est constitué d'un ou plusieurs problèmes.

Durée : cinq heures.

L'épreuve est notée sur 20.

Coefficient 4.

Une note globale égale ou inférieure à 5 est éliminatoire.

B. - Épreuves d'admission

1° Épreuve de leçon

L'épreuve a pour objet la conception et l'animation d'une séance d'enseignement.

Elle permet d'évaluer la maîtrise mathématique, les compétences didactiques et pédagogiques du candidat et la pertinence de l'utilisation des supports (outils numériques, manuels, tableau).

Le candidat tire au sort deux sujets comportant chacun l'intitulé d'une leçon. Il choisit l'une d'entre-elles. Pendant vingt minutes maximum, il expose un plan d'étude hiérarchisé et détaillé de la leçon. Il est attendu du candidat un recul correspondant au niveau master.

L'exposé est suivi, pendant dix minutes maximum, du développement par le candidat d'une partie de ce plan, puis d'un entretien de trente minutes avec le jury.

Le développement a pour objet l'exposé par le candidat d'un élément significatif de son plan, choisi par le jury.

L'entretien avec le jury permet au candidat de justifier la cohérence du plan, de préciser certains aspects du développement et de mettre en valeur sa culture relative à la leçon traitée.

Pendant la préparation de l'épreuve et lors de l'interrogation, le candidat peut utiliser le matériel informatique mis à sa disposition. Il a également accès à la bibliothèque numérique du concours et peut, dans les conditions définies par le jury, utiliser des ouvrages personnels.

Durée de préparation : 2 heures et 30 minutes.

Durée de l'épreuve : 1 heure.

Coefficient 5.

L'épreuve est notée sur 20. La note 0 est éliminatoire.

2° Épreuve d'entretien

L'épreuve d'entretien avec le jury porte sur la motivation du candidat et son aptitude à se projeter dans le métier de professeur au sein du service public de l'éducation.

L'entretien comporte une première partie d'une durée de quinze minutes débutant par une présentation, d'une durée de cinq minutes maximum, par le candidat des éléments de son parcours et des expériences qui l'ont conduit à se présenter au concours en valorisant notamment ses travaux de recherche, les enseignements suivis, les stages, l'engagement associatif ou les périodes de formation à l'étranger. Cette présentation donne lieu à un échange avec le jury.

La deuxième partie de l'épreuve, d'une durée de vingt minutes, doit permettre au jury, au travers de deux mises en situation professionnelle, l'une d'enseignement, la seconde en lien avec la vie scolaire, d'apprécier l'aptitude du candidat à :

- s'approprier les valeurs de la République, dont la laïcité, et les exigences du service public (droits et obligations du fonctionnaire dont la neutralité, lutte contre les discriminations et stéréotypes, promotion de l'égalité, notamment entre les filles et les garçons, etc.) ;
- faire connaître et faire partager ces valeurs et exigences.

Le candidat admissible transmet préalablement une fiche individuelle de renseignement établie sur le modèle figurant à l'annexe VI de [l'arrêté du 25 janvier 2021 modifié](#).

Pas de temps de préparation.

Durée de l'épreuve : 35 minutes

Coefficient 3.

L'épreuve est notée sur 20. La note 0 est éliminatoire.

Il est conseillé de consulter la page du site ministériel présentant les épreuves qui entrent en vigueur à compter de la session 2027 : <https://www.devenirenseignant.gouv.fr/les-epreuves-du-troisieme-concours-du-capes-section-mathematiques-1714>

1.2 Programme du concours

Le programme des épreuves est constitué des programmes du collège et du lycée général et technologique en vigueur, auxquels s'ajoute, pour l'épreuve d'admissibilité, un programme spécifique publié pour chaque session sur le [site internet du ministère chargé de l'éducation nationale](#).

1.3 Composition du jury

Le jury du troisième concours du CAPES et du CAFEP section Mathématiques pour la session 2026 a été nommé par un arrêté du ministre de l'Éducation nationale en date du 2 mars 2026.

Ce jury était constitué de 54 personnes (26 femmes et 28 hommes).

2. Quelques statistiques

2.1 Historique

Troisième concours CAPES	Postes	Présents	Admissibles	Admis
2009	22	79	24	9
2010	22	89	30	11
2011	23	108	47	21
2012	30	130	61	30
2013	40	155	84	39
2014 exceptionnelle	42	201	53	35
2014	45	181	98	45
2015	65	221	133	65 (LC : 16)
2016	100	297	195	100 (LC : 23)
2017	137	368	248	137 (LC : 5)
2018	145	432	223	136
2019	160	431	225	127
2020	157	348	-	127
2021	149	343	250	141
2022	179	201	134	74
2023	174	234	144	77
2024	174	225	151	80
2025	140	214	133	66
2026	70	170	94	49

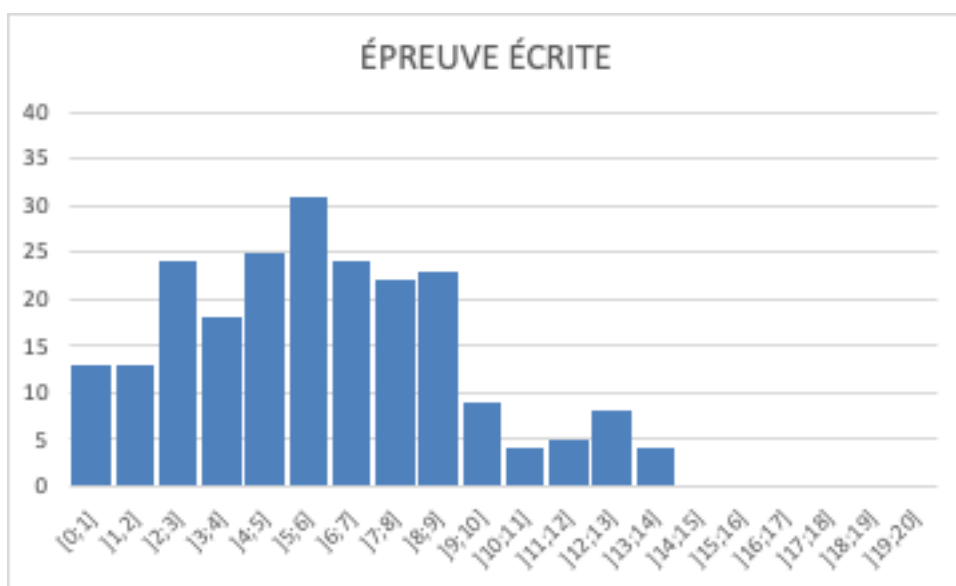
Troisième concours CAFEP	Postes	Présents	Admissibles	Admis
2009	3	33	8	3
2010	10	29	7	3
2011	2	28	8	2
2012	3	29	13	3
2013	5	28	13	5
2014 exceptionnelle	4	47	13	4
2014	5	57	16	5 (LC : 1)
2015	6	47	18	6 (LC : 1)
2016	6	65	13	6 (LC : 2)
2017	7	50	15	7
2018	7	82	14	7
2019	7	82	15	7
2020	10	65	-	10 (LC : 1)
2021	10	68	34	10
2022	10	43	29	10 (LC : 1)
2023	10	57	35	10 (LC : 2)
2024	12	50	34	12 (LC : 2)
2025	12	67	40	12 (LC : 3)
2026	13	54	36	13 (LC : 2)

2.2 Répartition des notes : épreuve d'admissibilité

224 candidats se sont présentés à l'épreuve d'admissibilité : 170 pour le CAPES, 54 pour le CAFEP. Parmi eux, 94 ont été éliminés pour avoir obtenu une note inférieure ou égale à 5, de sorte que le jury a prononcé l'admissibilité de 94 candidats au CAPES (note du dernier admissible : 5,02) et 36 au CAFEP (note du dernier admissible : 5,22).

Épreuve écrite

Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
5,76	3,15	3,26	5,57	7,865



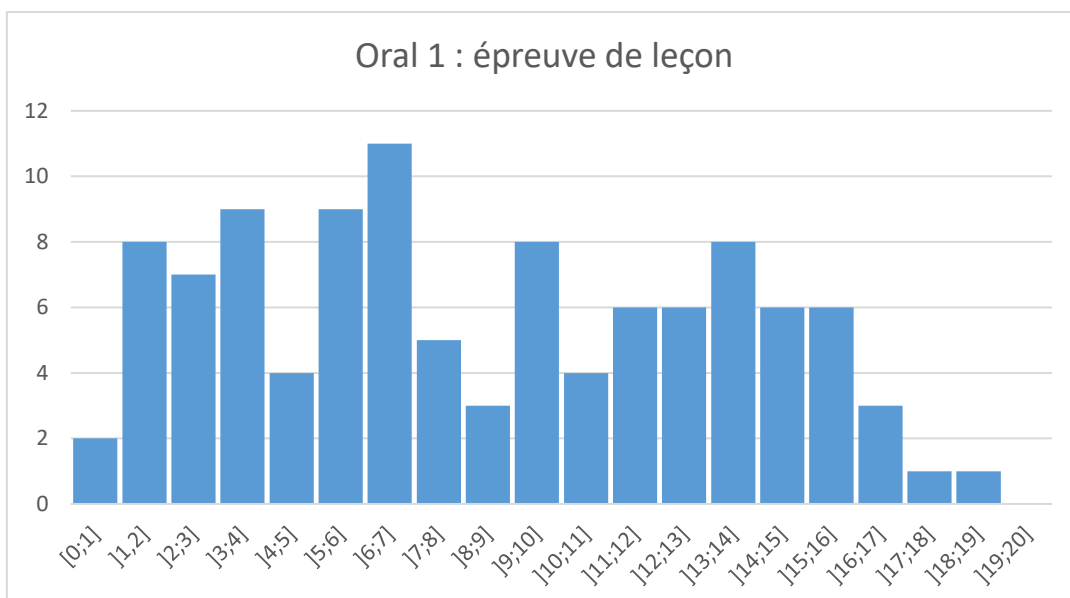
2.3 Répartition des notes : épreuves d'admission

24 des 130 candidats admissibles ne se sont pas présentés aux épreuves orales.

Pour le CAPES, le jury a fixé la barre d'admission à 96 sur 240, ce qui a permis de pourvoir 49 postes sur les 70 proposés. Les 13 postes du CAFEP ont été pourvus (total du dernier admis : 122,36) et deux candidats ayant un total supérieur ou égal à 115,7 ont été inscrits sur une liste complémentaire.

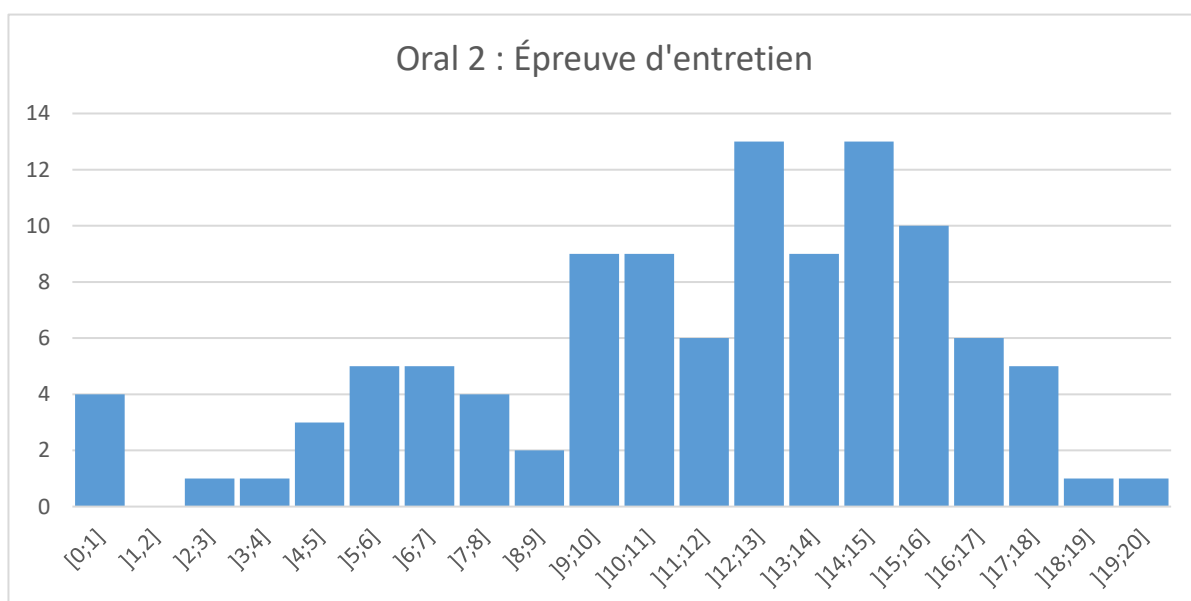
Épreuve de leçon (sur 20)

Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
8,89	4,82	5	8	13



Épreuve d'entretien (sur 20)

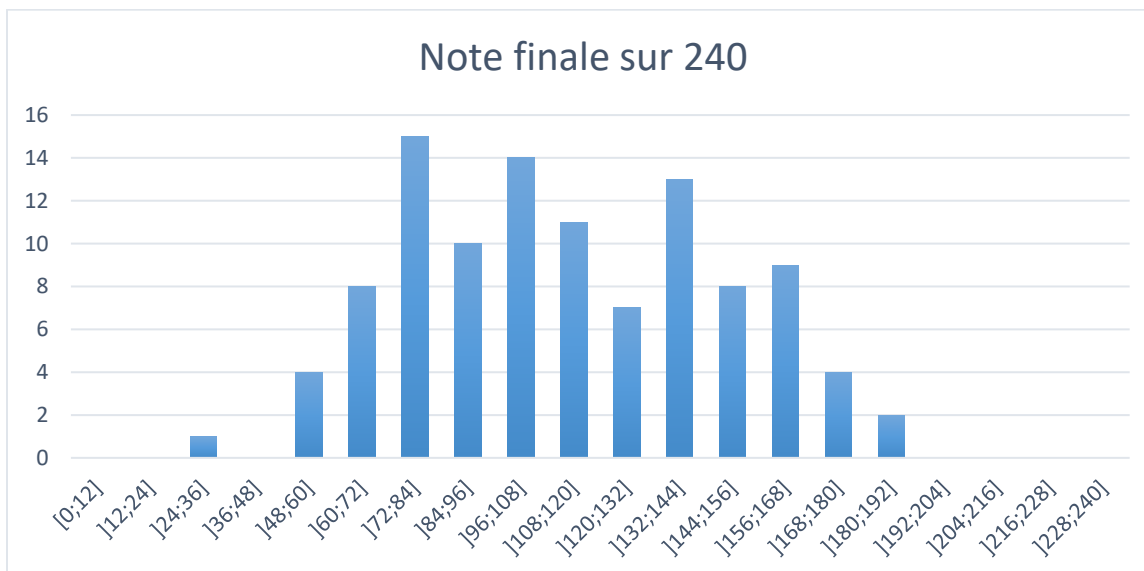
Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
11,96	4,34	10	13	15



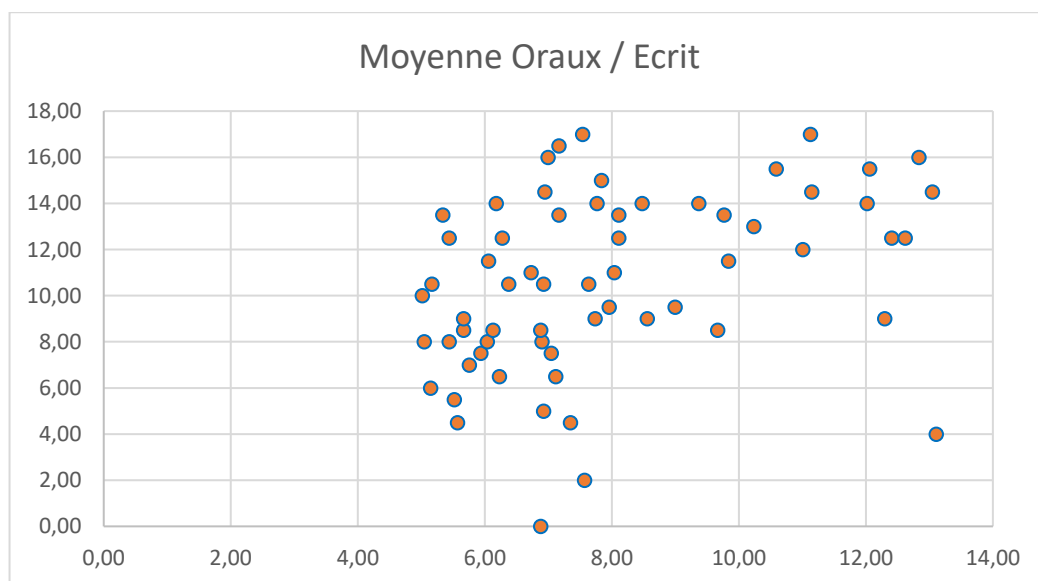
2.4 Répartition des notes : total

Note totale (écrit et oral) sur 240

Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
112,19	35,70	63,19	96,45	135,08



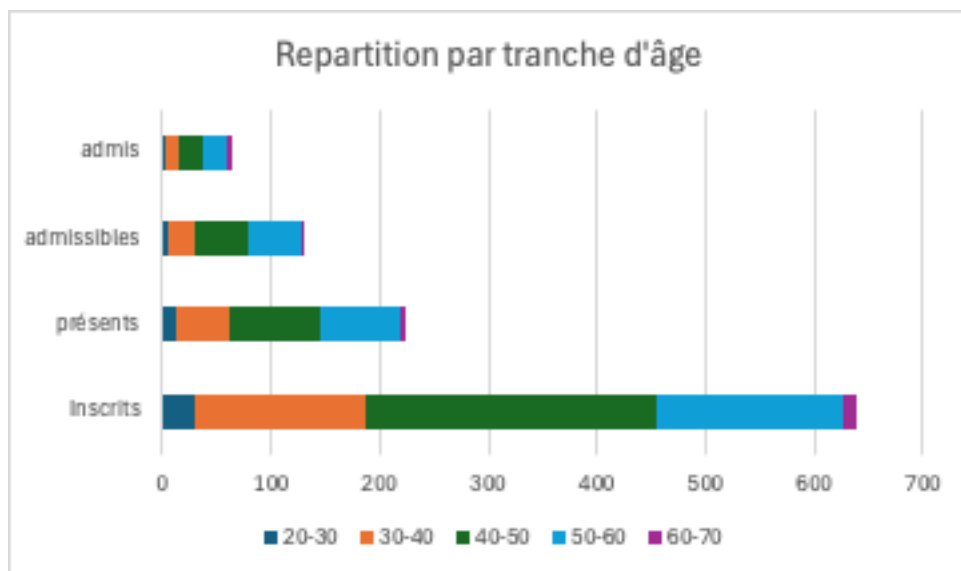
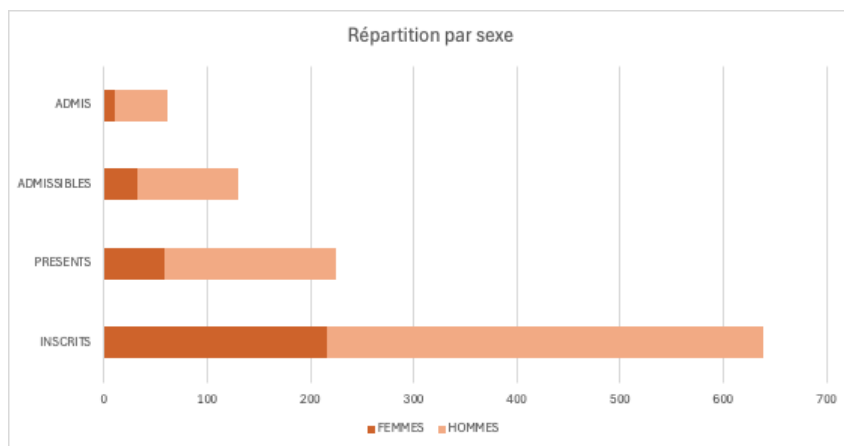
Sur le nuage de points suivant, les notes à l'épreuve d'admissibilité (sur 20) se trouvent en abscisse et les notes aux épreuves d'admission (sur 20) en ordonnée.



Le coefficient de corrélation entre l'écrit et l'oral est 0,35

2.5 Autres données

Les données suivantes concernent les concours du CAPES et CAFEP réunis. Elles ont été établies à partir des renseignements fournis par les candidats au moment de leur inscription.



	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Âge du plus âgé	65	65	63	61
Âge du plus jeune	25	25	28	28
Âge moyen	45	46	47	47

ACADÉMIE	Inscrits		Présents		Admissibles		Admis	
AIX MARSEILLE	36	5,64%	13	5,80%	7	5,38%	3	4,84%
AMIENS	21	3,29%	8	3,57%	4	3,08%	2	3,23%
BESANCON	15	2,35%	5	2,23%	2	1,54%	0	0,00%
BORDEAUX	32	5,02%	10	4,46%	6	4,62%	2	3,23%
CLERMONT-FERRAND	8	1,25%	2	0,89%	2	1,54%	0	0,00%
CORSE	2	0,31%	1	0,45%	0	0,00%	0	0,00%
DIJON	9	1,41%	5	2,23%	3	2,31%	0	0,00%
GRENOBLE	33	5,17%	10	4,46%	9	6,92%	1	1,61%
GUADELOUPE	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
GUYANE	2	0,31%	2	0,89%	0	0,00%	0	0,00%
LA RÉUNION	14	2,19%	1	0,45%	1	0,77%	0	0,00%
LILLE	37	5,80%	8	3,57%	3	2,31%	2	3,23%
LIMOGES	4	0,63%	2	0,89%	2	1,54%	0	0,00%
LYON	34	5,33%	9	4,02%	4	3,08%	10	16,13%
MARTINIQUE	6	0,94%	1	0,45%	0	0%	0	0%
MAYOTTE	2	0,31%	1	0,45%	1	9,23%	1	1,61%
MONTPELLIER	30	4,70%	16	7,14%	12	0,77%	7	11,29%
NANCY-METZ	9	1,41%	2	0,89%	1	2,31%	1	1,61%
NANTES	25	3,92%	7	3,13%	3	1,54%	2	3,23%
NICE	17	2,66%	9	4,02%	2	3,08%	0	0,00%
NORMANDIE	23	3,61%	8	3,57%	4	9,23%	1	1,61%
NOUVELLE CALÉDONIE	1	0,16%	0	0%	0	0%	0	0,00%
ORLÉANS-TOURS	12	1,88%	2	0,89%	1	0,77%	1	1,61%
POITIERS	15	2,35%	5	2,23%	3	2,31%	0	0,00%
POLYNÉSIE FRANCAISE	2	0,31%	1	0,45%	0	0,0%	0	0,00%
REIMS	3	0,47%	1	0,45%	0	0%	0	0,00%
RENNES	26	4,08%	9	4,02%	7	5,38%	3	4,84%
STRASBOURG	16	2,51%	6	2,68%	4	3,08%	3	4,84%
TOULOUSE	33	5,17%	18	8,04%	10	7,69%	4	6,45%
SIEC (CRETEIL, PARIS, VERSAILLES)	171	26,80%	62	27,68%	39	30,00%	19	30,65%
étranger	0	0%	0	0,0%	0	0,0%	0	0%
TOTAL	638							

3. Énoncés

3.1 Sujet de l'épreuve écrite

Le sujet de l'épreuve écrite est disponible sur le site [devenirenseignant](http://devenirenseignant.fr) ainsi qu'en annexe 5 en fin de document.

3.2 Sujets de l'épreuve de leçon

L'ensemble de l'épreuve s'inscrit dans le cadre des programmes de mathématiques du collège et du lycée général et technologique. Il est attendu du candidat un exposé faisant une synthèse sur le sujet choisi, sous la forme d'un plan d'étude hiérarchisé et détaillé, qui doit comprendre des exemples et des applications permettant d'illustrer ce sujet.

01. Exemples de dénombrements dans différentes situations.
02. Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle.
03. Variables aléatoires discrètes.
04. Variables aléatoires réelles à densité.
05. Statistique à une ou deux variables, représentation et analyse de données.
06. Multiples et diviseurs dans $\mathbb{N}$, nombres premiers.
07. PGCD dans $\mathbb{Z}$.
08. Congruences dans $\mathbb{Z}$.
09. Différentes écritures d'un nombre complexe.
10. Utilisation des nombres complexes en géométrie.
11. Trigonométrie.
12. Repérage dans le plan, dans l'espace, sur une sphère.
13. Droites et plans dans l'espace.
14. Transformations du plan. Frises et pavages.
15. Relations métriques et angulaires dans le triangle.
16. Solides de l'espace : représentations et calculs de volumes.
17. Périmètres, aires, volumes.
18. Exemples de résolution de problèmes de géométrie plane à l'aide des vecteurs.
19. Produit scalaire dans le plan.
20. Applications de la notion de proportionnalité à la géométrie.
21. Problèmes de constructions géométriques.
22. Exemples de problèmes d'alignement, de parallélisme.
23. Exemples de problèmes d'intersection en géométrie.
24. Pourcentages et taux d'évolution.
25. Problèmes conduisant à une modélisation par des équations ou des inéquations.
26. Problèmes conduisant à une modélisation par des graphes, par des matrices.
27. Fonctions polynômes du second degré. Équations et inéquations du second degré.
28. Suites numériques. Limites.
29. Suites définies par récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$.
30. Détermination de limites de fonctions réelles de variable réelle.
31. Théorème des valeurs intermédiaires.
32. Nombre dérivé. Fonction dérivée.

- 33. Fonctions exponentielles.
- 34. Fonctions logarithmes.
- 35. Fonctions convexes.
- 36. Primitives, équations différentielles.
- 37. Intégrales, primitives.
- 38. Exemples de calculs d'intégrales (méthodes exactes, méthodes approchées).
- 39. Exemples de résolution d'équations (méthodes exactes, méthodes approchées).
- 40. Exemples de modèles d'évolution.
- 41. Problèmes dont la résolution fait intervenir un algorithme.
- 42. Différents types de raisonnement en mathématiques.
- 43. Exemples d'approche historique de notions mathématiques enseignées au collège, au lycée.
- 44. Applications des mathématiques à d'autres disciplines.

4. Analyse et commentaires

4.1 Épreuve écrite

Les commentaires qui suivent sont spécifiques au troisième concours.

Pour des commentaires sur les questions non suffisamment traitées par les candidats du troisième concours, nous vous invitons à consulter le rapport du CAPES externe.

Le sujet de la première épreuve écrite est constitué de deux problèmes indépendants.

Le premier problème est un questionnaire de type Vrai – Faux avec *réponses argumentées*, abordant successivement six thématiques au programme du concours (*Calcul dans $\mathbb{R}$, Analyse réelle, Arithmétique, Géométrie et nombres complexes, Dénombrement et probabilités, Algèbre linéaire*). Le problème vise à évaluer les connaissances des candidats sur ces notions élémentaires ainsi que leur capacité à rédiger un argumentaire convaincant.

Le second problème a pour objectif d'étudier l'irrationalité de certains nombres en faisant intervenir des interactions entre la géométrie, l'analyse mais également l'arithmétique et la trigonométrie. Il vise à évaluer les capacités d'analyse et de synthèse des candidats.

La rédaction d'une partie des copies témoigne d'une bonne maîtrise de la langue française et du langage mathématique. Ces copies se distinguent par une rédaction claire, précise et suffisamment détaillée pour rendre le raisonnement parfaitement compréhensible. Le jury observe toutefois qu'un nombre encore important de copies se caractérise par une orthographe insuffisamment maîtrisée ainsi que par des phrases trop laconiques laissant une place excessive à l'implicite. Il relève également que l'expression mathématique et la langue française sont parfois mêlées à mauvais escient, les symboles mathématiques étant utilisés comme des abréviations au sein de phrases rédigées dans un français approximatif.

La maîtrise de la discipline se manifeste par une communication claire, argumentée et utilisant le langage mathématique dans toute sa richesse. Il est recommandé aux futurs candidats de veiller à articuler le langage mathématique et la langue française dans le respect des règles en vigueur (par exemple, le symbole d'implication ne saurait se substituer au mot « donc »). Les notations géométriques doivent également être rigoureusement respectées : un segment, une droite ou un vecteur ne se notent pas de la même manière.

La copie rendue doit être rédigée avec soin et sans faute d'orthographe. Les meilleures copies présentent une rédaction aérée, structurée et agréable à lire, qui met efficacement en valeur le raisonnement. Les

futurs candidats veilleront à ne pas rendre un brouillon rédigé dans un style télégraphique, mais une copie ne laissant aucune place à l'interprétation du correcteur.

La plupart des candidats distinguent correctement les principaux objets mathématiques. Le jury observe néanmoins que des imprécisions de langage conduisent encore, dans certaines copies, à des confusions entre une fonction et son ensemble d'images, ou entre une suite et son terme général. De même, les relations entre les objets mathématiques doivent être maîtrisées afin d'éviter des confusions entre appartenance et inclusion.

Le jury attend des réponses complètes et rédigées, et non des raccourcis tels que « et ainsi de suite », notamment dans les démonstrations par récurrence. Si de nombreux candidats prennent soin de justifier leurs raisonnements, les expressions du type « il est clair » ou « il est trivial » doivent être employées avec parcimonie et uniquement lorsqu'elles sont pleinement justifiées. De même, les conditions d'application de tout théorème doivent être systématiquement vérifiées avant sa mise en œuvre.

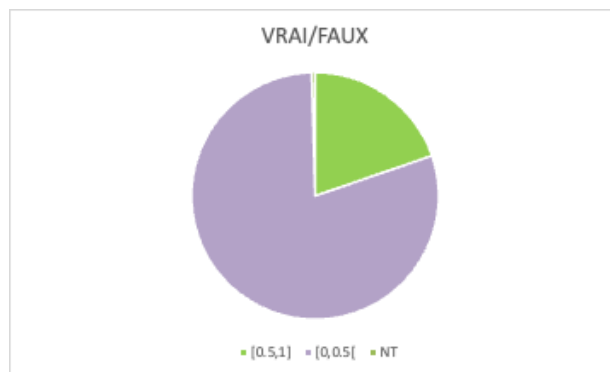
Enfin, en ce qui concerne les calculs demandés, de nombreux candidats présentent une démarche explicite qui permet de suivre leur raisonnement. Il est recommandé de ne pas se limiter au seul résultat final : les principales étapes du calcul doivent apparaître clairement sur la copie afin de permettre au correcteur de comprendre la démarche suivie.

Pour pouvoir comparer les résultats des candidats sur les deux problèmes et sur toutes les questions analysées dans la suite, nous avons ramené les notes sur 1 point. Nous appellerons « taux de réussite » le pourcentage de candidats ayant atteint la note de 0,5 lorsque les notes sont ramenées entre 0 et 1.

PROBLEME 1 (vrai-faux)

Dans ce problème, il s'agit de répondre et d'argumenter chaque réponse, dans le cas contraire, aucun point n'est attribué à la question.

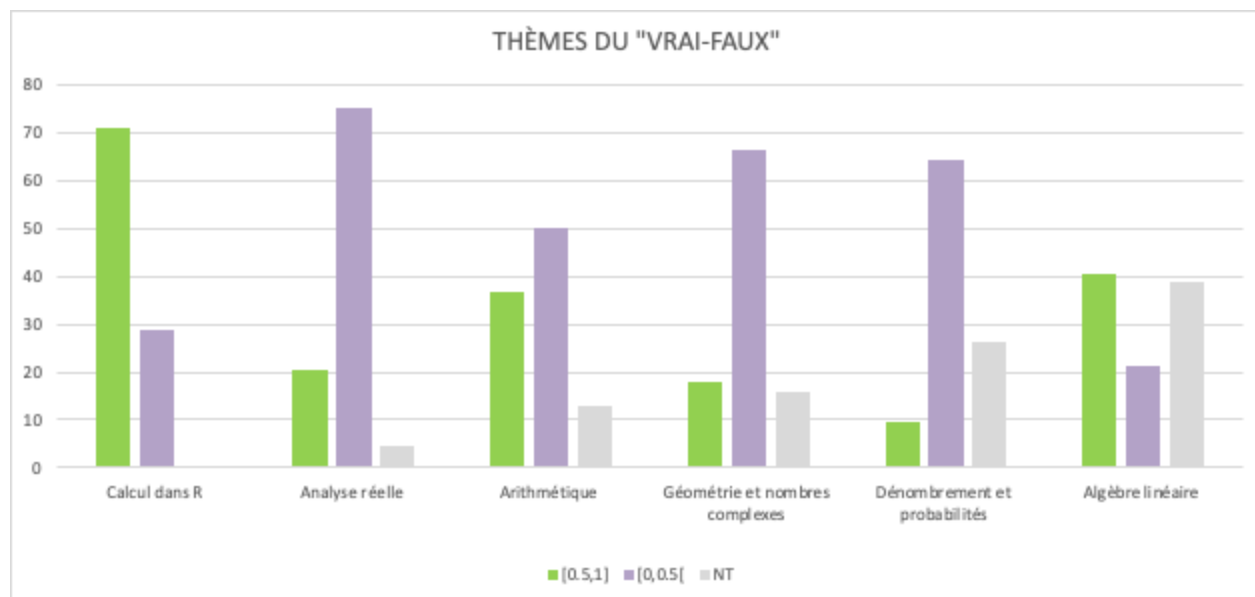
Quasiment 20% des candidats atteignent la moyenne dans ce problème :



Dans l'argumentation, la plupart des candidats utilisent les contre-exemples à bon escient. Le jury rappelle toutefois qu'un exemple, même judicieusement choisi, ne saurait tenir lieu de démonstration et que toute erreur de logique est pénalisée : confondre contraposée et réciproque n'est pas acceptable, pas davantage qu'utiliser l'implication à mauvais escient.

La connaissance des nombres et des fonctions, indispensable à tout enseignant de mathématiques, est globalement maîtrisée. Le jury observe néanmoins que certaines notions fondamentales demeurent insuffisamment consolidées chez quelques candidats. Ainsi, ne pas connaître la définition d'un nombre décimal ou confondre paramètre et variable constitue une erreur qui est pénalisée.

Réussites des différentes parties : (En ramenant les notes de chacune des parties du problème sur 1) les taux de réussite sont les suivants



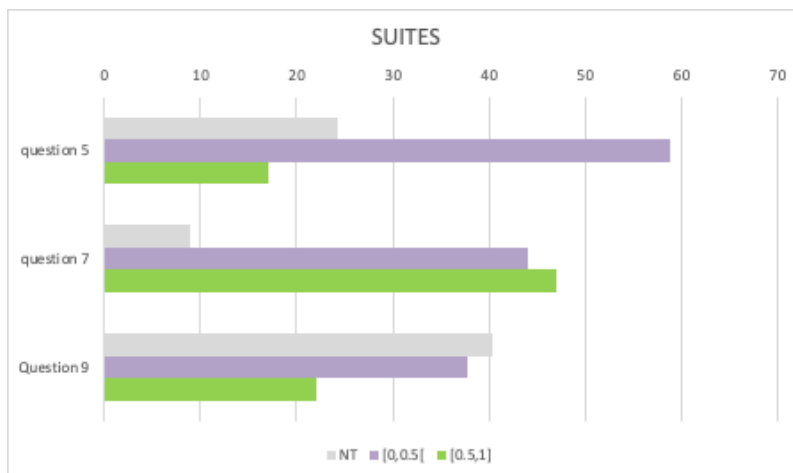
Les parties « Calcul dans $\mathbb{R}$ » et « Analyse » ont été abordées par la quasi-totalité des candidats. Avec un taux de réussite de 70 %, la partie « Calcul dans $\mathbb{R}$ » est celle qui obtient les meilleurs résultats. Le jury observe néanmoins quelques erreurs récurrentes sur des calculs pourtant élémentaires, comme l'affirmation erronée selon laquelle la somme des inverses de deux nombres est égale à l'inverse de leur produit.

En Analyse, de nombreux candidats témoignent d'une connaissance satisfaisante des notions abordées. Le jury relève toutefois des difficultés persistantes concernant la notion de valeur absolue ainsi que certaines définitions fondamentales, telles que celle du nombre dérivé.

La partie d'arithmétique a été traitée par une grande majorité des candidats, même si 13 % d'entre eux ne l'ont pas abordée. Les résultats obtenus dans cette partie demeurent toutefois plus modestes et invitent les futurs candidats à consolider leurs connaissances dans ce domaine.

Afin de mieux cerner les difficultés rencontrées par les candidats, les commentaires qui suivent regroupent les questions par thèmes ou par types de raisonnements mobilisés dans les réponses.

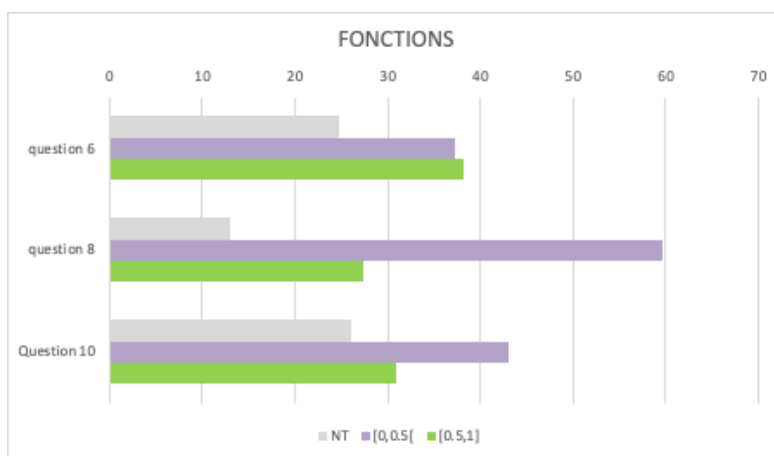
Sur les suites



Dans la question 5, il s'agissait de démontrer que toute suite réelle convergente est bornée. Cette démonstration classique, est attendue d'un futur enseignant de mathématiques. Si un certain nombre de candidats en maîtrisent le principe, le taux de réussite demeure toutefois inférieur aux attentes du jury. Certains candidats considèrent à tort que cette proposition est fausse.

En revanche, le jury relève davantage de réussites aux deux autres questions portant sur l'étude de suites particulières.

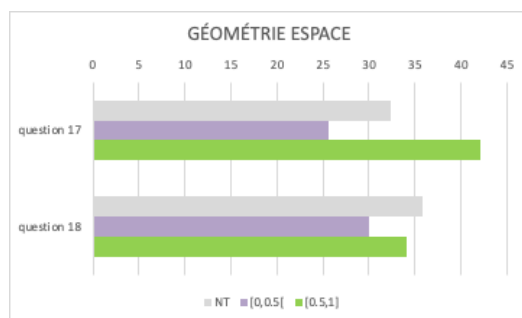
Sur les fonctions



La question 6, globalement bien réussie, mobilise les connaissances relatives à la fonction exponentielle. Elle met également en évidence le rôle de la variable dans les formules de dérivation. Si la plupart des candidats calculent correctement la dérivée de la fonction proposée, le jury observe que, dans près d'une réponse sur deux, la vérification consistant à montrer que l'expression proposée n'est pas la dérivée recherchée est omise.

La question 8 met en jeu les propriétés de la fonction valeur absolue ainsi que la définition du nombre dérivé. Si certains candidats mobilisent ces connaissances avec justesse, le jury relève encore des difficultés concernant ces notions fondamentales. Il rappelle qu'un futur enseignant de mathématiques doit connaître ces définitions et savoir y revenir lorsqu'elles constituent le fondement du raisonnement.

Sur la géométrie dans l'espace

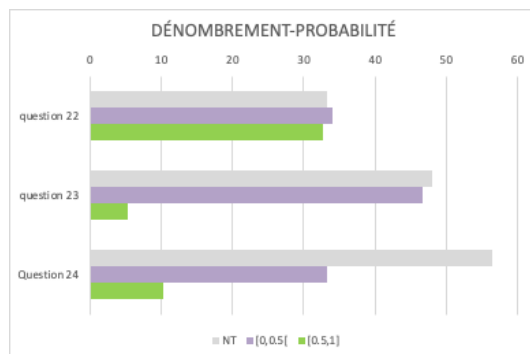


Le jury observe que certains candidats, plus en difficulté en analyse, mobilisent avec davantage d'aisance leurs connaissances en géométrie dans l'espace, comme en témoigne le bon taux de réussite à la question 17.

Les questions 20 et 21, relatives aux nombres complexes, se révèlent en revanche plus délicates. Seuls 10 % des candidats traitent correctement la question 20, contre 34 % pour la question 21. Ces résultats montrent que le lien entre les transformations du plan et leur traduction à l'aide des nombres complexes

demeure insuffisamment maîtrisé. Le jury rappelle que cette notion fait pleinement partie des connaissances exigibles au concours et invite les futurs candidats à en consolider la maîtrise.

Sur le dénombrement et les probabilités



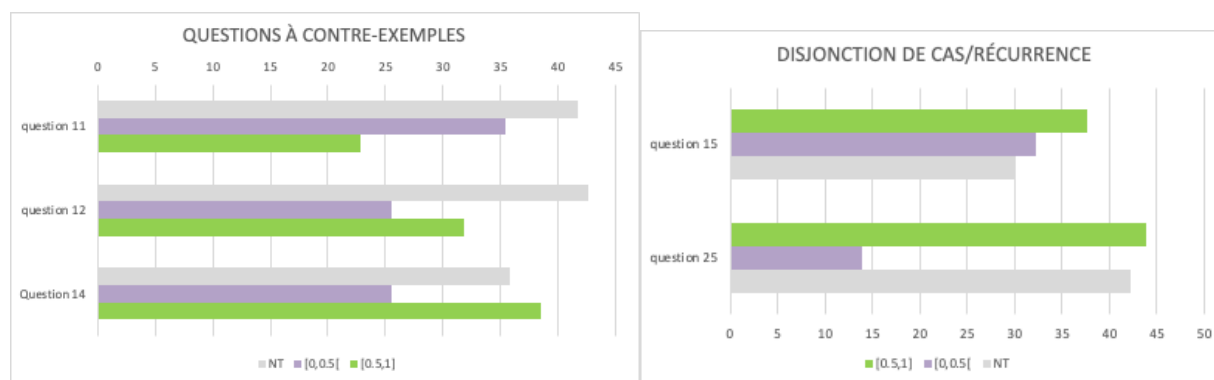
Cette partie a été abordée par un nombre plus limité de candidats. La question 22 obtient néanmoins un taux de réussite d'environ un tiers des réponses. Elle consiste à dénombrer les cas possibles dans une situation simple. En revanche, dès que la situation proposée devient plus complexe, le taux de réussite diminue sensiblement.

Sur les types de raisonnements

Afin d'analyser les réponses sous l'angle des raisonnements mobilisés, le jury s'est intéressé aux questions faisant appel, d'une part, à la recherche de contre-exemples et, d'autre part, à la disjonction de cas ou au raisonnement par récurrence.

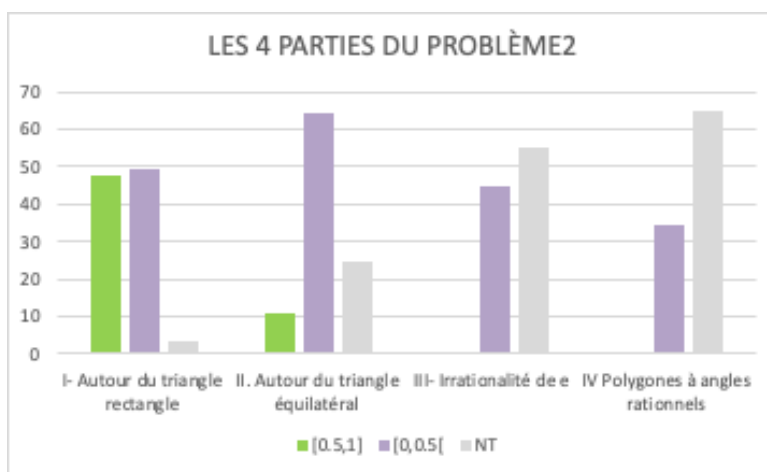
Les réponses apportées aux questions 11, 13 et 14 montrent que la recherche de contre-exemples est globalement bien maîtrisée par les candidats.

De même, la disjonction de cas attendue à la question 15 ainsi que le raisonnement par récurrence mobilisé à la question 25 sont, lorsqu'ils sont traités, globalement bien maîtrisés. Les futurs candidats veilleront toutefois à rédiger ces raisonnements avec toute la rigueur attendue, en explicitant les différentes étapes de leur démonstration.



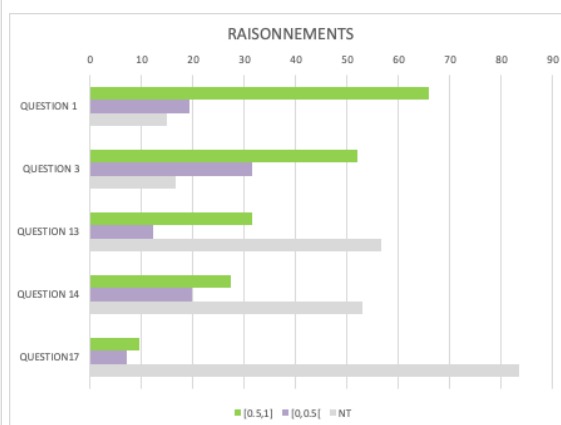
PROBLEME 2

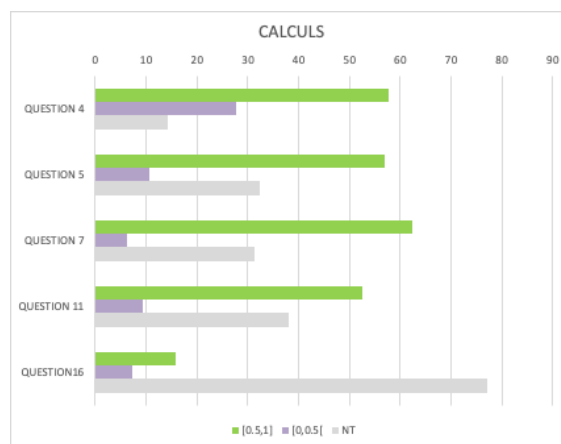
Les taux de réussite pour les quatre parties de ce problème sont les suivants :



Seules les parties I et II présentent un taux de réussite supérieur à 50 %. Le jury observe toutefois que la structure d'ensemble du problème n'a pas toujours été perçue par les candidats, comme en témoigne le faible nombre de réponses apportées aux questions de synthèse ou de conclusion des différentes parties. Il invite les futurs candidats à prendre le temps de lire l'intégralité du sujet afin d'en comprendre l'articulation, d'identifier les liens entre les différentes questions et de repérer les questions de déduction. Par ailleurs, certaines questions tout à fait accessibles figurent dans les parties III et IV. C'est notamment le cas de la question 26, consacrée à l'étude d'une fonction polynomiale, qui est réussie par 83 % des candidats l'ayant traitée, alors même que 82 % des candidats ne l'ont pas abordée.

Les réponses apportées aux parties I et II sont analysées selon trois axes : la maîtrise des définitions et des propriétés, la mise en œuvre de raisonnements simples et la maîtrise des techniques de calcul.





La connaissance des définitions et des propriétés des figures planes constitue un attendu du concours. Si une majorité de candidats maîtrise la définition du trapèze (61 % de réussite), des difficultés persistent pour d'autres notions fondamentales : moins de 40 % des candidats connaissent la définition d'un triangle rectangle (questions 2 et 8) et moins de 40 % parviennent à établir l'expression de l'aire d'un triangle équilatéral à partir de la formule de l'aire d'un triangle (question 12).

En ce qui concerne les raisonnements simples de géométrie, la question 1 obtient un taux de réussite de 65 %, témoignant d'une maîtrise satisfaisante des raisonnements les plus classiques. En revanche, ce taux diminue sensiblement lorsqu'il est demandé de mobiliser plusieurs démarches, notamment pour déterminer une aire selon deux méthodes différentes.

Les questions portant sur les calculs algébriques sont, en moyenne, celles qui obtiennent les meilleurs taux de réussite.

Le jury rappelle que cette épreuve vise à évaluer les capacités d'analyse et de synthèse des candidats. La maîtrise des techniques de calcul constitue un prérequis, mais elle ne suffit pas : les futurs candidats doivent également être capables d'en comprendre les fondements, d'en justifier les étapes et d'établir les liens avec les raisonnements géométriques, notamment dans les parties I et II.

S'agissant des parties III et IV, le faible nombre de réponses ne permet pas de dégager des observations suffisamment étayées pour formuler des commentaires constructifs. Le jury renvoie donc les futurs candidats aux développements figurant dans le rapport du jury du CAPES externe.

4.2 Épreuves orales

4.2.1 L'épreuve de leçon

La plupart des recommandations formulées dans les rapports du jury des dernières sessions demeurent valables.

Au début du temps de préparation, le candidat tire au sort un couplage de deux sujets. Il choisit l'un d'eux et prépare son exposé. Il dispose d'un ordinateur lui permettant d'utiliser certains logiciels et d'accéder aux ressources officielles (programmes et documents d'accompagnement), ainsi qu'à la bibliothèque numérique du concours.

Plan d'étude hiérarchisé et détaillé de la leçon

Pendant les vingt premières minutes, le candidat expose un plan d'étude hiérarchisé et détaillé de la leçon. Cet exposé ne consiste ni en la lecture d'un sommaire ni en une simple énumération des différentes parties ; il permet de présenter, de manière rigoureuse, les principaux résultats mathématiques en

précisant leur statut. Au-delà de la précision et de la structuration logique des énoncés, le jury apprécie la cohérence du plan ainsi que la pertinence des exemples et des exercices choisis.

Le jury apprécie que les objets mathématiques soient définis avec rigueur et sans ambiguïté dès leur introduction, et que les prérequis soient présentés de manière claire, concise et correctement hiérarchisée.

Le jury observe des progrès dans la présentation des plans, notamment dans le niveau de détail apporté. Il attire toutefois l'attention des candidats sur le fait que le plan d'un manuel ne correspond pas nécessairement à celui de la leçon.

L'utilisation alternée du tableau et du vidéoprojecteur est appréciée et contribue à dynamiser la présentation. La posture du candidat constitue également un élément important de l'évaluation. Il s'agit d'une épreuve orale : l'exposé doit être principalement adressé au jury et le candidat doit savoir se détacher du tableau, de l'ordinateur et de ses notes. Les meilleures prestations montrent que les candidats s'appuient sur leurs supports sans s'y limiter. Les futurs candidats veilleront donc à ne pas se contenter de lire leur brouillon ou de recopier des extraits de manuel.

Enfin, le jury invite les candidats à porter un regard critique sur les ressources qu'ils mobilisent. Certains extraits de manuels peuvent contenir des imprécisions, voire des erreurs ; les candidats doivent être capables de les repérer, de les analyser et, le cas échéant, de les corriger.

Illustration par des exemples et des applications

Le plan hiérarchisé et détaillé doit comprendre des exemples et des applications permettant d'illustrer le sujet. Il est donc important que, dans leur préparation au concours, les candidats s'interrogent sur le sens précis des termes « applications » et « exemples ».

Le terme « applications » renvoie à l'utilisation des notions mathématiques de la leçon dans différents domaines, qu'ils soient purement mathématiques, en lien avec d'autres disciplines ou inscrits dans une perspective historique.

Le terme « exemples » est à comprendre au sens de l'exemple scolaire, c'est-à-dire d'un énoncé permettant d'illustrer la mise en œuvre correcte d'une notion mathématique, mais également de l'exemple caractéristique sur lequel l'élève peut s'appuyer pour s'approprier cette notion.

Dans l'ensemble, les candidats se sont efforcés d'illustrer les définitions et les propriétés par des exemples souvent bien choisis. Le jury a également apprécié la proposition d'exercices pertinents, en lien avec les objectifs de la leçon.

Pour les leçons portant sur des exemples et des applications, le jury attend que ceux-ci soient pleinement intégrés au plan hiérarchisé et présentés de manière cohérente, afin de mettre en évidence leur contribution à la compréhension de la notion étudiée.

Développement d'un élément significatif du plan

Le jury choisit un élément significatif ou une partie du plan que le candidat est invité à développer. Les meilleures prestations proposent plusieurs développements possibles et offrent ainsi au jury un véritable choix. À l'inverse, une stratégie consistant à limiter ce choix en ne proposant qu'un seul développement ou uniquement des exercices très élémentaires peut traduire une maîtrise insuffisante du contenu présenté.

Lorsque le candidat s'appuie sur le corrigé d'un manuel, ce n'est pas la lecture de l'extrait projeté qui est évaluée, mais sa capacité à en maîtriser le contenu mathématique, à l'expliquer avec précision et à le présenter dans un langage rigoureux.

Les candidats sont invités à faire preuve de rigueur dans leurs démonstrations, notamment dans l'utilisation des liens logiques et des quantificateurs.

Entretien avec le jury

Après ces deux temps, durant lesquels le jury n'intervient pas, un échange permet au candidat de justifier la cohérence de son plan, de préciser certains aspects de son développement et de mettre en valeur sa culture mathématique en lien avec la leçon traitée. Il peut notamment lui être demandé de rédiger avec rigueur, au tableau, un énoncé mathématique, une démonstration ou la correction d'un exercice. Cet échange permet d'évaluer non seulement la maîtrise des contenus mathématiques, mais également la capacité du candidat à produire une rédaction claire, structurée et adaptée à ce qui pourrait constituer la trace écrite des élèves. Il est attendu des candidats qu'ils proposent des exercices dont ils maîtrisent pleinement la résolution.

Lors de cet entretien, et compte tenu de la diversité des compétences professionnelles attendues d'un futur enseignant de mathématiques, le jury évalue les candidats au regard de critères variés, parmi lesquels :

- la maîtrise des contenus mathématiques ;
- l'organisation et la clarté du propos ;
- la maîtrise de la langue française ;
- l'aptitude à expliquer clairement une notion à des élèves de collège ou de lycée ;
- la qualité des échanges avec le jury.

Le jury peut également proposer un exercice à résoudre. Lorsque le candidat choisit de présenter sa leçon à un niveau collège, il peut être amené à approfondir une notion afin de montrer sa capacité à prendre du recul et à mobiliser des connaissances de niveau supérieur. À l'inverse, lorsqu'un candidat situe sa leçon à un niveau post-baccalauréat, il doit être en mesure de répondre à des questions ou de résoudre des exercices relevant du programme du second degré en s'appuyant sur les outils et les connaissances du collège ou du lycée.

Maîtrise des contenus mathématiques

Le jury a observé une maîtrise contrastée des contenus mathématiques. De nombreux candidats témoignent d'une bonne connaissance des notions au programme et certains savent utilement les mettre en perspective avec les enseignements du supérieur. Le jury a particulièrement apprécié ces prestations, qui traduisent une réelle prise de recul sur les contenus présentés.

Il observe néanmoins que certains candidats peinent à dépasser le cadre des programmes du collège et du lycée. Pour ces candidats, la rédaction des énoncés mathématiques au tableau manque parfois de rigueur : absence de connecteurs logiques, rédaction incomplète, succession de calculs sans commentaires ou justifications, etc.

Le jury attend des candidats qu'ils connaissent les différents statuts des énoncés mathématiques (définition, propriété, propriété caractéristique, théorème, exemple) et qu'ils maîtrisent le vocabulaire associé aux objets mathématiques mobilisés. Il rappelle également que la maîtrise des prérequis constitue un attendu essentiel de l'épreuve.

Compétences didactiques et pédagogiques

Le jury peut interroger le candidat sur la cohérence du plan proposé ou sur les propriétés mobilisées dans le développement. Les échanges permettent ainsi au candidat de justifier ses choix et de mettre en évidence la logique de son exposé.

Certains candidats ont choisi de présenter la progressivité d'une notion selon les différents niveaux d'enseignement, en mettant en évidence les apports spécifiques de chacun d'eux. Cette approche a été appréciée lorsqu'elle permettait de donner une vision cohérente des apprentissages tout en évitant les redondances.

Plusieurs candidats ont également proposé des activités destinées à introduire la leçon. Le jury a apprécié ces propositions lorsqu'elles demeuraient concises, s'intégraient naturellement à la progression de l'exposé et présentaient un réel intérêt pour l'introduction ou la compréhension de la notion étudiée.

Pertinence dans l'utilisation des supports (outils numériques, manuels, tableau)

Les outils numériques (GeoGebra, Python, tableur) sont mobilisés de manière pertinente par de nombreux candidats lorsqu'ils sont intégrés à l'exposé. Leur utilisation apporte souvent un éclairage complémentaire sur les notions étudiées et permet d'enrichir les démarches proposées. Le jury a apprécié les présentations qui exploitent ces outils au service du propos et encourage les futurs candidats à en développer davantage les usages, notamment en tirant parti du caractère dynamique de GeoGebra et des possibilités offertes par Python pour l'exploration, la modélisation et la résolution de problèmes.

Afin d'optimiser leur temps de préparation, de nombreux candidats ont recours à des captures d'écran. Cette pratique constitue un appui efficace à la présentation lorsque les éléments projetés sont parfaitement maîtrisés et que le candidat est capable de les commenter, de les justifier, de les adapter aux questions du jury ou d'en prolonger l'exploitation.

Qualités orales

Le jury a apprécié la qualité de l'expression orale de nombreux candidats ainsi que leur capacité à présenter leur travail avec aisance, en s'appuyant sur leurs notes sans s'y limiter. Cette prise de distance favorise des échanges plus fluides et permet de mieux mettre en valeur les connaissances et les compétences du candidat. Les meilleures prestations se distinguent par une communication claire, assurée et adaptée aux différents temps de l'épreuve. Les futurs candidats gagneraient à développer cette aisance tout au long du développement et de l'entretien.

Les candidats se montrent généralement attentifs aux questions posées et cherchent à exploiter les indications apportées par le jury. Cette qualité favorise des échanges constructifs. Le jury encourage néanmoins les futurs candidats à prendre le temps nécessaire à la réflexion avant de répondre. Dans certaines situations, une analyse plus approfondie de la question permettrait de mobiliser davantage leurs connaissances et d'apporter une réponse plus complète et mieux argumentée.

Pour les remarques spécifiques aux différentes leçons, les références aux rapports des sessions antérieures restent d'actualité.

L'ensemble de l'épreuve s'inscrit dans le cadre des programmes de mathématiques du collège et du lycée général et technologique. La liste des leçons est disponible sur le [site du jury](#), ce qui permet aux candidats de les travailler en amont en s'appuyant sur des ressources institutionnelles ou sur des manuels.

4.2.2 L'épreuve d'entretien

Présentation par le candidat des éléments de son parcours et des expériences

La première partie de l'entretien débute par une présentation, par le candidat, de son parcours et des expériences qui l'ont conduit à se présenter au concours. Cette présentation est généralement préparée avec soin, ce qui se traduit par une expression claire, un propos structuré et une bonne maîtrise de l'expression orale. Le jury apprécie que les candidats mettent en évidence la manière dont leur parcours et leurs expériences nourrissent leur projet de devenir enseignant.

Le jury est également sensible à la sincérité des candidats lorsqu'ils expliquent les motivations de leur reconversion professionnelle ou apportent des éléments permettant de mieux comprendre d'éventuelles périodes d'inactivité.

Enfin, les candidats ont tout intérêt à valoriser les expériences acquises à l'occasion d'une immersion ou d'un stage en établissement scolaire, en montrant ce qu'elles leur ont permis de découvrir du métier d'enseignant et des compétences qu'il requiert.

Projection dans le métier d'enseignant en appui sur le parcours

Cette présentation donne lieu à un échange avec le jury. Le jury apprécie que les candidats mettent en avant les observations de classes qu'ils ont effectuées ainsi que les échanges qu'ils ont eus avec des enseignants. Il regrette toutefois que certains candidats n'aient pas pris le temps de se renseigner sur le métier, le système éducatif ou les différents acteurs intervenant dans un établissement scolaire. Ils s'appuient alors essentiellement sur leur vécu personnel et développent, de ce fait, une vision parfois erronée ou idéalisée du système éducatif. Les difficultés susceptibles d'être rencontrées dans l'exercice du métier sont alors insuffisamment anticipées. Certains candidats centrent même entièrement leur propos sur le fonctionnement de l'établissement dans lequel ils évoluent actuellement et ne semblent pas en mesure d'envisager d'autres contextes d'enseignement ou d'autres profils d'élèves que ceux qu'ils connaissent. Une meilleure connaissance du référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation leur permettrait également de mieux mettre en perspective leur parcours et les compétences qu'ils ont développées.

Cet échange peut également permettre au candidat de montrer comment il envisage de mobiliser, dans le métier d'enseignant, les compétences acquises au cours de ses expériences antérieures.

Projection dans le métier au travers des situations

La deuxième partie de l'épreuve permet au jury, à travers deux mises en situation professionnelle, l'une d'enseignement, la seconde en lien avec la vie scolaire, d'apprécier l'aptitude du candidat à s'approprier les valeurs de la République, à les faire connaître et à les faire partager. L'exposé de la situation est proposé sous la forme d'une conversation, tout en laissant au candidat la possibilité de prendre le temps de réfléchir afin d'en comprendre les enjeux.

Les candidats fondent souvent leurs choix sur des valeurs personnelles fortes. Une bonne connaissance du système éducatif, du fonctionnement des établissements et du rôle des différents acteurs constitue un atout essentiel pour enrichir leur analyse.

Il est attendu du candidat qu'il s'appuie sur des références personnelles, mais également sur les compétences professionnelles, le projet d'établissement, ses instances, les politiques éducatives, les textes législatifs ainsi que les principes et les valeurs de la République. De nombreux candidats parviennent à mobiliser ces différents éléments pour proposer des réponses argumentées et contextualisées. Les candidats gagneraient toutefois à dépasser leur seule expérience d'élève ou de parent d'élève afin

d'envisager une plus grande diversité de situations professionnelles. Les prestations les plus convaincantes sont celles qui proposent des solutions à court et à moyen terme, argumentées au regard des principes et des valeurs en jeu, et qui explicitent les fondements des choix opérés.

Il n'est évidemment pas attendu une « bonne réponse ». Le jury apprécie que les candidats soient en mesure de proposer plusieurs analyses d'une même situation, de formuler différentes hypothèses et d'envisager plusieurs pistes d'action. Les références à l'actualité récente de l'Éducation nationale, lorsqu'elles sont pertinentes, ainsi que les liens établis avec l'activité mathématique menée en classe, constituent également des éléments de valorisation de la prestation. Enfin, lorsque les candidats sont interrogés sur les principes et les valeurs mobilisés par les situations proposées, ils gagneraient à dépasser des formulations générales ou convenues afin de mettre davantage en évidence leur réflexion personnelle et leur capacité à justifier leurs choix.

Qualités orales

Le jury valorise la fluidité de l'expression et une bonne maîtrise de la langue. Les échanges ont souvent été dynamiques, avec une certaine qualité d'écoute et une bonne interaction.

Quelques exemples de situations

Voici deux situations proposées lors de cette session.

Il est généralement demandé au candidat de distinguer les valeurs ou principes mis en jeu, d'analyser la situation et de dire comment il réagirait s'il y était confronté.

Enseignement

Vous êtes professeur(e) de mathématiques d'une classe de troisième. Au cours d'une activité d'introduction à la notion de fonction, un élève intervient indiquant qu'il est inutile de s'y intéresser car cela ne présente aucun intérêt au quotidien.

Vous êtes professeur(e) de mathématiques en lycée. Dans le cadre d'un bac blanc organisé par l'établissement, les élèves de première obtiennent des résultats faibles, ce qui provoque l'inquiétude des parents qui interpellent le chef d'établissement.

Vie scolaire

Vous êtes professeur(e) de mathématiques en collège. Vous accompagnez une sortie scolaire organisée en classe de 5ème. Dans le cadre de cette sortie, la visite des ruines d'une église est prévue. Un élève refuse de rentrer dans ce monument sous prétexte que sa religion le lui interdit.

Vous êtes professeur(e) de mathématiques en lycée. Vous apprenez qu'un élève d'une de vos classes fait l'objet de moqueries de la part d'autres élèves de cette même classe sur un réseau social.

5. Annexe : sujet de l'épreuve écrite

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^*$ désigne l'ensemble des nombres réels non nuls.

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Problème 1 : Vrai-Faux

Pour chacun des items suivants, préciser si l'assertion finale est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Calculs dans $\mathbb{R}$

1. Soient x et y deux nombres réels tels que $2 \leq x \leq 6$ et $3 \leq y \leq 4$.
On a : $-1 \leq x - y \leq 2$.
2. La cotisation annuelle d'une assurance automobile a augmenté de 35% de sa valeur initiale en dix ans.
Le taux d'évolution annuel moyen de la cotisation pendant cette période est de 3,5%.
3. On considère le polynôme P donné par $P(X) = 2X^3 + 5X^2 - X - 6$.
Le polynôme P peut être factorisé dans $\mathbb{R}[X]$ par $(X - 1)$ et $(X - 2)$.
4. Soient a, b, c trois nombres entiers naturels non nuls, distincts deux à deux.
La somme des inverses de ces trois nombres n'est pas un nombre décimal.

Analyse réelle

5. Toute suite numérique réelle convergente est bornée.
6. La fonction $f: x \mapsto 2^x$ est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie, pour tout réel x , par $f'(x) = x2^{x-1}$.
7. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$.
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
8. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
9. Soit la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, par $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.
La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
10. Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est paire.
La fonction dérivée de la fonction f est impaire.

11. Soit une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est paire. Toute primitive de la fonction f est impaire.
12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$. On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. La fonction F est convexe sur $\mathbb{R}$.
13. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \ln|e^x - 1|$.
L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles.

Arithmétique

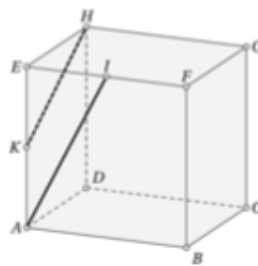
14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est un nombre premier alors, $n! + 1$ est premier.
15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.
16. Soit n un entier naturel non nul qui vérifie $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = 9$.
L'entier n est multiple de 3.

Géométrie et nombres complexes

17. Dans un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère les deux plans d'équations cartésiennes suivantes
 $\mathcal{P}_1 : x - y - z = 2, \quad \mathcal{P}_2 : 3x - y + z = 4$.
Ces plans sont sécants selon la droite passant par le point $A(1, -1, 0)$, dirigée par le vecteur $\vec{v}$ de composantes $(1, 2, -1)$.

18. Dans un espace affine euclidien de dimension 3, on considère un pavé droit $ABCDEFGH$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$ et le point K est le milieu du segment $[AE]$, comme sur l'illustration ci-contre.

Les droites (AI) et (KH) sont parallèles.



19. Dans le plan affine euclidien, on considère deux points distincts Ω et Ω' . Soit k un réel non nul et différent de 1.
La composée de l'homothétie de centre Ω et de rapport k et de l'homothétie de centre Ω' et de rapport $\frac{1}{k}$ est l'identité du plan.
20. Soit $b \in \mathbb{C}$. On considère la transformation du plan complexe qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -z + b$.
Cette transformation est une symétrie centrale.
21. Soient z et z' deux nombres complexes.
La contraposée de la proposition « Si les nombres z et z' sont réels alors le produit zz' est réel » est « Si le produit zz' n'est pas réel alors z et z' ne sont pas des nombres réels ».

Dénombrement et probabilités

22. On dispose d'un sac contenant des jetons indiscernables au toucher : cinq jetons rouges, portant les numéros de 1 à 5, et quatre jetons verts, portant les numéros 1 à 4. Un tirage consiste à piocher dans le sac 2 jetons simultanément.
Il y a 10 tirages différents avec exactement un jeton rouge et exactement un jeton portant le numéro 2.
23. On repartit quatre boules numérotées de 1 à 4 dans trois urnes numérotées de 1 à 3. Une urne peut donc contenir plusieurs boules.
Il y a 3×2^4 façons de disposer les boules de sorte qu'au moins une urne soit vide.
24. Une urne opaque contient un jeton vert et un jeton rouge. On tire au hasard un jeton de l'urne : si le jeton tiré est rouge on s'arrête, s'il est vert, on le remet dans l'urne avec un jeton vert supplémentaire et on effectue un nouveau tirage. Soit X la variable aléatoire qui donne le rang d'obtention du jeton rouge.
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$

Algèbre linéaire

25. Soit A la matrice 2×2 à coefficients réels, donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, A^n = 2^{n-1}A.$
26. Soient A et B deux matrices symétriques carrées à coefficients réels.
Le produit AB est une matrice symétrique.

Problème 2 : calcul et géométrie

L'objet de ce problème est d'étudier des situations faisant intervenir des interactions entre calcul et géométrie.

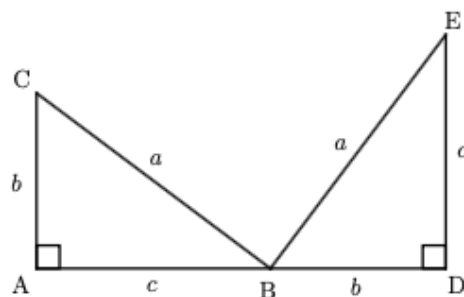
I. Autour du triangle rectangle

A. Une démonstration du théorème de Pythagore

On se propose de démontrer le théorème de Pythagore en suivant une méthode géométrique attribuée à James A. Garfield⁽¹⁾.

On considère un triangle ABC rectangle en A et on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On construit un triangle DEB ayant les mêmes dimensions que ABC et tel que les points A, B et D soient alignés comme sur la figure ci-dessous.

(1). James A. Garfield (1831–1881), 20e président des États-Unis.



1. Démontrer que les droites (BC) et (BE) sont perpendiculaires.
2. Justifier que le quadrilatère ADEC est un trapèze.
3. Calculer de deux façons différentes l'aire du trapèze ADEC et conclure.

B. Irrationalité de $\sqrt{2}$

L'objectif de cette partie est de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ en retrouvant une égalité entre deux fractions avec un raisonnement géométrique dû à Tom M. Apostol⁽²⁾. Pour cela, on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel et on l'écrit sous forme d'une fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $(a; b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

4. Justifier l'encadrement $1 < \sqrt{2} < 2$.

5. Démontrer que $\frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$.

On considère un triangle PQR rectangle et isocèle en P tel que $PQ = PR = b$. On note S le point de [QR] tel que $RP = RS$ et T le point d'intersection de [PQ] avec la perpendiculaire à (QR) passant par S.

6. Faire une figure.
7. Démontrer que $QR = a$.
8. Démontrer que le triangle QST est rectangle isocèle en S.
9. Démontrer que $\frac{TQ}{SQ} = \frac{2b-a}{a-b}$.
10. Retrouver l'égalité de la question 5. et conclure.

II. Autour du triangle équilatéral

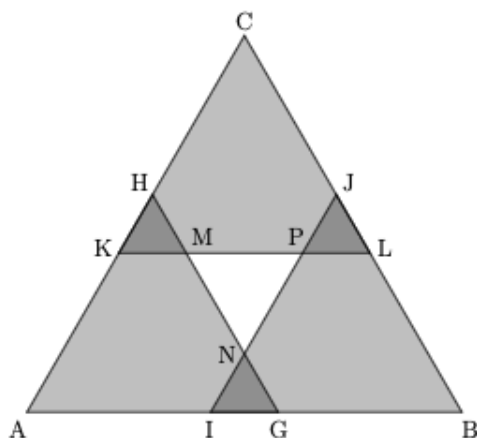
A. Irrationalité de $\sqrt{3}$

L'objectif de cette partie est de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{3}$. Pour cela, on suppose que $\sqrt{3}$ est rationnel et on l'écrit sous forme irréductible $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ avec $(a; b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

11. Vérifier que $(2a - 3b) = \sqrt{3}(2b - a)$.

(2). Tom M. Apostol (1923–2016), mathématicien américain.

On considère un triangle équilatéral ABC dont le côté mesure a et trois triangles équilatéraux AGH, IBJ et KLC dont les côtés mesurent b comme sur la figure ci-dessous.



12. À partir de la formule de l'aire d'un triangle, établir l'expression de l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de la longueur de ses cotés.
13. Démontrer que l'aire du triangle ABC est égale au triple de l'aire du triangle AGH.
14. Justifier que $1 < \sqrt{3} < 2$ et en déduire que les triangles AGH, IBJ et KLC se recouvrent comme sur la figure ci-dessus.
Ils forment ainsi quatre nouveaux triangles IGN, KMH, PLJ et MNP.
15. Démontrer que ces quatre triangles sont équilatéraux.
16. Calculer les longueurs des côtés de ces quatre triangles équilatéraux.
17. Démontrer que l'aire du triangle MNP est égale au triple de l'aire du triangle KMH. On pourra s'appuyer sur la question 13. sans chercher à déterminer l'expression de ces aires en fonction de a et b .
18. Retrouver l'égalité de la question 11. et conclure.

B. Théorème de Lucas

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

19. On suppose que A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral direct (sommets nommés dans le sens trigonométrique). On note z_A , z_B et z_C les affixes respectives des points A, B et C.
Justifier que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
20. En utilisant l'irrationalité de $\sqrt{3}$, déduire de la question précédente le théorème de Lucas⁽³⁾ : trois points distincts du plan à coordonnées rationnelles ne sont jamais les sommets d'un triangle équilatéral.

(3). Édouard Lucas (1842–1891), mathématicien français.

III. Irrationalité de e par la méthode de Sondow

Dans cette partie, on admet qu'il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On appelle cette fonction, fonction exponentielle et on la note $\exp$. Aucune autre propriété de la fonction exponentielle n'est supposée connue. On pose $e = \exp(1)$.

21. a. En étudiant la fonction $\varphi : x \mapsto \exp(x) \exp(-x)$ définie sur $\mathbb{R}$, démontrer que, pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.
- b. En déduire que, pour tout réel x , $\exp(x) > 0$ puis que la fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
22. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \exp(t) dt.$$

- a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n < \frac{e}{(n+1)!}$.
- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer I_{n+1} en fonction de n et de I_n .
- c. Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e = S_n + I_n$.
- d. Conclure de ce qui précède que (S_n) converge vers e .
23. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $k \geq 4$, $k! > 2^k$.
- b. Calculer I_1 et I_2 .
- c. Déduire du calcul de I_2 et de la question 22a. que $e < 3$.
- d. Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n < \frac{1}{n!}$.
- e. Déterminer le plus petit entier naturel k , tel que $2^{-k} < 10^{-3}$.
- f. Déterminer un nombre rationnel r tel que $|e - r| < 10^{-3}$. On pourra s'appuyer sur les questions 23a. et 23e. En déduire une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de e .
- g. En utilisant la suite (S_n) , écrire en langage Python une fonction `approximation` telle que, pour tout entier naturel m , `approximation(m)` renvoie une valeur approchée de e à 10^{-m} près. On pourra utiliser la fonction `factorial` (qui renvoie $n!$ pour `factorial(n)`) mais on ne devra pas utiliser la valeur de e fournie par le langage Python.
24. On se propose de démontrer que le nombre e est irrationnel en suivant une méthode géométrique.

On considère la suite d'intervalle $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$J_n =]S_n; S_n + \frac{1}{n!}[.$$

On a donc $J_1 =]2; 3[$.

- a. En prenant comme unité 12 cm et sans déterminer les extrémités des intervalles, représenter, l'un en dessous de l'autre, J_1 , J_2 , J_3 et J_4 .

- b. Justifier que $J_2 = \left] \frac{5}{2!}; \frac{6}{2!} \right[$, $J_3 = \left] \frac{16}{3!}; \frac{17}{3!} \right[$ et $J_4 = \left] \frac{65}{4!}; \frac{66}{4!} \right[$.
- c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n+1} \subset J_n$.
- d. En déduire que $e \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} J_n$.
- e. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{k}{n!} \notin J_n$.
- f. Démontrer que si e est rationnel alors il peut s'écrire $e = \frac{p}{q!}$ avec p et q entiers naturels non nuls et conclure.

IV. Polygones à angles rationnels

On dit qu'un angle est rationnel s'il admet une mesure en radian de la forme $r\pi$ où $r \in \mathbb{Q}$.

Le but de cette partie est d'établir certaines propriétés des polygones ayant des angles rationnels.

A. Un premier exemple

On s'intéresse au problème suivant : On cherche à savoir si il existe un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont rationnelles et qui possède un angle dont une mesure en radian est $\frac{\pi}{18}$.

- 25.
 - a. Démontrer que, pour tout réel x , $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.
 - b. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ est une racine du polynôme P défini par $P(X) = 8X^3 - 6X + 1$.
- 26.
 - a. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto 8x^3 - 6x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites.
 - b. Justifier que le polynôme P possède 3 racines réelles α, β et γ telles que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8} < \beta < \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2} < \gamma < 1$.
- 27. On souhaite démontrer que les nombres α, β et γ sont irrationnels. Pour cela, on suppose que P admet une racine rationnelle $r = \frac{s}{t}$ écrite sous forme irréductible.
 - a. Soient a et b deux entiers premiers entre eux. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, a et b^k sont premiers entre eux.
 - b. Justifier que $8s^3 - 6st^2 + t^3 = 0$.
 - c. Déduire des questions précédentes que $t \in \{-2; -1; 1; 2\}$.
 - d. Aboutir à une contradiction et conclure.
- 28. Existe-t-il un triangle rectangle dont les côtés ont des longueurs rationnelles et dont un angle mesure $\frac{\pi}{18}$?

B. Théorème de Niven

Le but de cette section est de démontrer le théorème de Niven⁽⁴⁾ : si θ est un angle rationnel tel que $\cos(\theta)$ est rationnel alors $\cos(\theta) \in \left\{-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1\right\}$.

29. On considère un polynôme P défini par $P(X) = \sum_{k=0}^d c_k X^k$ de degré $d \in \mathbb{N}^*$ et dont les coefficients c_k appartiennent à $\mathbb{Z}$. On suppose que P est unitaire (c'est-à-dire que $c_d = 1$) et que $r = \frac{s}{t}$ est une racine rationnelle non nulle de P écrite sous forme irréductible.

a. Justifier que $s^d = -t \sum_{k=0}^{d-1} c_k s^k t^{d-k-1}$.

- b. En déduire que r est un entier. On pourra utiliser le résultat de la question 27a.

30. Soit la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} P_0(X) = 2, & P_1(X) = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X) \end{cases}$$

- a. Calculer $P_2(X)$, $P_3(X)$ et $P_4(X)$.

- b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme unitaire de degré n à coefficients entiers.

- c. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(2 \cos(x)) = 2 \cos(nx)$.

31. On considère un rationnel $r = \frac{s}{t}$ écrit sous forme irréductible.

- a. Déterminer un polynôme unitaire Q à coefficients entiers tel que $Q(2 \cos(r\pi)) = 0$. On pourra utiliser le polynôme P_t défini dans la question précédente.

- b. En déduire une démonstration du théorème de Niven. On pourra utiliser le résultat de la question 29b.

C. Applications du théorème de Niven : triangles à côtés et angles rationnels

On considère un triangle (non aplati) ABC dont les trois côtés ont des longueurs rationnelles.

32. Démontrer que les cosinus des trois angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont des nombres rationnels.

33. En déduire que si le triangle ABC possède trois angles rationnels alors le triangle ABC est équilatéral. On pourra utiliser le théorème de Niven.

(4). Ivan Niven (1915–1999), mathématicien américano-canadien.

6. Annexe : ressources mises à disposition des candidats

Pendant le temps de préparation et lors de l'interrogation orale, le candidat bénéficie du matériel informatique mis à sa disposition.

Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser de calculatrices.

Le transfert des données entre la salle de préparation et la salle d'interrogation se fait grâce au réseau de l'établissement. L'utilisation de tout support numérique personnel est exclue.

L'usage des téléphones mobiles et de toute forme d'accès à internet est interdit dans l'enceinte de l'établissement.

Les documents suivants sont mis à disposition des candidats sous forme numérique :

- réglementation du concours ;
- référentiel des compétences professionnelles ;
- programmes de Mathématiques (collège et lycée) et documents ressources en ligne sur Eduscol.

Manuels numériques

Le jury remercie vivement les éditeurs qui ont mis gracieusement leurs manuels à la disposition du concours.

BELIN

- Delta : 6e (2016), cycle 4 (2016)
- Métamaths : 2de (2019) et 1re spécialité (2019)
- Cahier Python pour les maths en 2de (2020)
- Enseignement scientifique 1re (2019)
- Enseignement scientifique Terminale (2020)

BORDAS

- CQFD : 1re spécialité (2019)
- Indice : 2de (2019), 1re spécialité (2019), 1re séries technologiques (2019), Terminale mathématiques complémentaires (2020), Terminale spécialité (2020), Terminale séries technologiques, enseignement commun et spécialité STI2D/STL (2020)
- Myriade : 6e cycle 3 (2016), cycle 4 (2016)
- Enseignement scientifique 1re (2019), Enseignement scientifique Terminale (2020)

DELAGRAVE

- BTS Industriels (B, C et D) (2014)
- Algomaths : 1re séries technologiques enseignement commun et spécialité STI2D/STL (2019), Terminale séries technologiques enseignement commun et spécialité STI2D/STL (2020)

DIDIER

- Mathsmonde : 6e cycle 3 (2017), cycle 4 (en un volume) (2016)
- Math'x : 2de (2019)

- Enseignement scientifique 1re (2019)

FOUCHER

- Sigma : 1re séries technologiques (2019), Terminale séries technologiques enseignement commun et spécialité STI2D/STL (2020)
- Sigma BTS : BTS CG (2015), Mathématiques pour l'informatique BTS SIO (2014), BTS Industriels Tome 1 groupement A (2002), BTS Industriels Tome 2 groupement A (2002), BTS Industriels Tome 1 Analyse et algèbre groupements B, C et D (2014), BTS Industriels Tome 2 Statistique et probabilités groupements B, C et D (2014)

HACHETTE

- Déclic : Déclic 2de (2019), Déclic 1re (2019), Terminale mathématiques complémentaires (2020)
- Phare : 6e (2016), 5e (2016)
- Kiwi cycle 4 (2016)
- Mission Indigo : cycle 4 5e (2016), cycle 4 4e (2016), cycle 4 3e (2016)
- Barbazo : 2de (2019), 1re spécialité (2019), Terminale spécialité (2020), mathématiques complémentaires (2020)
- Calao : 1re séries technologiques mathématiques enseignement commun et spécialité STI2D/STL (2019), Terminales STI2D/STL Mathématiques enseignement commun et spécialité (2020)
- Enseignement scientifique 1re (2019), Enseignement scientifique Terminale (2020)
- BTS : Mathématiques groupement A (2006), Mathématiques groupement B, C et D (2006)

HATIER

- Dimensions : 6e cycle 3 (2016), 3e année du cycle 4 (2016), cycle 4 (2016)
- Variations : 2de (2019), 1re spécialité (2019), Terminale spécialité (2020)
- Enseignement scientifique 1re (2019), Enseignement scientifique Terminale (2020)

MAGNARD

- Delta Maths : 6e (2016), cycle 4 (2017)
- Sésamath : cycle 4 (2016), Terminale spécialité (2020), mathématiques complémentaires (2020), mathématiques expertes (2020)
- Maths : 2de (2019), 1re (2019)
- Enseignement Scientifique 1re (2019), Enseignement scientifique Terminale (2020)

NATHAN

- Transmath : 6e Cycle 3 (2016), cycle 4 (2016), 2de (2019), 1re spécialité (2019)
- Techmaths : 1re enseignement commun et spécialité STI2D (2019), Terminale enseignement commun et spécialité STI2D/STL (2020)
- Hyperbole : 2de (2019), 1re (2019), Terminale spécialité (2020), mathématiques complémentaires (2020), mathématiques expertes (2020)
- Enseignement scientifique 1re (2019), Enseignement scientifique Terminale (2020)

DUNOD

- Mathématiques pour l'informatique BTS SIO (2015), Programmation en Python pour les mathématiques (2016)

ELLIPSES

- Apprendre la programmation par le jeu, à la découverte du langage Python 3 (2015)
- Python, les bases de l'algorithmique et de la programmation (2015)

EYROLLES

- Apprendre à programmer avec Python 3 (2012)
- Informatique et sciences du numérique - édition spéciale Python ! (2013)

MASSON

- Éléments d'algorithmique (1992)

Le candidat peut également, dans les conditions définies par le jury, utiliser des ouvrages personnels. Seuls sont autorisés les livres en vente dans le commerce, à condition qu'ils ne soient pas annotés. Sont exclus les ouvrages de préparation aux épreuves orales du concours. Le jury se réserve la possibilité d'interdire l'usage de certains ouvrages dont le contenu serait contraire à l'esprit des épreuves.

Logiciels

- LibreOffice
 - Émulateur de calculatrice numworks
 - Geogebra 5
 - Python 3 (éditeur Pyzo avec les bibliothèques numpy, scipy et matplotlib)
 - Scratch
-